QUESTIONS DU TD M103 DU 23/04

par

Valentin Hernandez

1. Question

Question 1.1. — Pourquoi lorsqu'on définit une symétrie/projection peut-on décomposer un vecteur sous la forme $d + \delta$ (cf. Exercice 8 q 2) ? Si s est une symétrie pourquoi a t'on $s \circ s = s^2 = \mathrm{id}$?

C'est la définition (ou presque) de supplémentaires : si
$$E = F \oplus G,$$
i.e. F, G supplémentaires dans E, alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique
$$u = f + g$$
avec $f \in F$ et $g \in G$: l'existence c'est $E = F + G$ (i.e. tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un de G), et l'unicité c'est parce que l'intersection est nulle : si on a deux écritures
$$f + g = f' + g'$$
on en déduit
$$f - f' = g - g'$$
or $f - f'$ est dans F (car F sev) et $g - g'$ est dans G (car G sev) donc ils sont dans $F \cap G$ puisqu'ils sont égaux, donc ils sont nuls car $F \cap G = \{0\}$, donc $f = f'$ et $g = g'$: donc l'écriture est unique.

Pour définir une symétrie ou une projection il faut partir de supplémentaires $F \oplus G$, et on parle de symétrie/projection par rapport à/sur F parallèlement à G.

Par définition d'une symétrie (regardez l'énoncé du cours (proposition 4.5.12) que j'avais donné) par rapport à F parallèlement à G,
$$s(f + g) = f - g.$$

Donc pour $u \in E$, on peut décomposer (uniquement) d'après ce qui précède $u = f + g$ et

$$s(u) = s(f + g) = f - g,$$

et donc

$$s(s(u)) = s(f - g) = f + g,$$

puisque $f - g$ est déjà la décomposition dans $F \oplus G$ (car $-g$ est dans G car G est un sev). donc $s(s(u)) = u$ ie $s^2 = \mathrm{id}$.

Question 1.2. — Supposons que l'on a $E = F \oplus G$, p la projection sur F parallèlement à G, pourquoi à t'on $F = \operatorname{Im} p$, $G = \ker p$?

Bon c'est un truc qui semble évident : l'image d'une projection c'est ce sur quoi on projette. Si on veux le vérifier mathématiquement déjà on sait que p est défini par

$$p(u) = p(f + g) = f$$

si $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ (écriture unique comme tout à l'heure) : c'est l'énoncé proposition 4.5.5 que j'avais donné.

Donc $p(u) = f$, donc $p(u)$ est dans F. Réciproquement évidemment si on projette sur F un élément de F, on ne fait rien. Ça se voit sur la formule : $f = f + 0$ donc

$$p(f) = p(f + 0) = f.$$

Donc f est dans $\operatorname{Im} p$ puisque c'est en particulier sa propre image (c'est aussi l'image de $f + g$ pour n'importe quel g dans G, mais on s'en moque ici).

De même ça semble évident que le noyau d'une projection, qui est définit comme ce qui s'envoie sur 0, c'est ce parallèlement à quoi on projette : j'imagine que vous avez en tête les projections orthogonales, où l'on projette orthogonalement sur une droite ou un plan, c'est le cas quand on prend pour G la droite ou le plan orthogonal : on voit que tout ce qui est orthogonal est envoyé sur 0. Ça marche pareil quand G est juste un supplémentaire (i.e. par forcément orthogonal). Mathématiquement ça se voit bien : si $u = f + g$,

$$p(f + g) = f,$$

donc $p(f + g) = 0$ si et seulement si $f = 0$, donc u est dans le noyau si et seulement si $f = 0$, i.e. $u = g$ i.e. u appartient à G.

Valentin Hernandez, Bureau 3il, LMO, Orsay • *E-mail :* valentin.hernandez@math.cnrs.fr