QUESTIONS DU TD M103 DU 23/04

par

Valentin Hernandez

1. Question

Question 1.1. — Quel est le lien entre injectivité de f et le noyau $\ker f$? Peut-on le voir géométriquement (sur un dessin) ?

Pour le lien entre $\operatorname{Ker} f$ et l'injectivité ce n'est pas si facile à voir sur un dessin : la raison c'est la linéarité.

— f est injective si lorsque deux elements x et y sont différents, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont différents.

— $\operatorname{Ker} f$ c'est l'ensemble des éléments qui sont envoyés sur 0, comme f est linéaire, $f(0) = 0$, donc $\operatorname{Ker} f$ c'est l'ensemble des éléments x qui ont la même image que 0.

Donc si $\operatorname{Ker} f$ contient un x non nul, $f(x) = 0 = f(0)$, donc x et 0 contredisent l'injectivité. Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f$ est nul, i.e. ne contient que 0, alors si $f(x) = f(y)$, par linéarité, $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$, donc $x - y$ est dans $\operatorname{Ker} f$, qui vaut $\{0\}$, donc $x - y = 0$ i.e. $x = y$. Donc f est injective !

Le problème, donc, c'est que la linéarité se voit assez mal géométriquement. Le mieux que vous puissiez faire c'est tenter de voir des exemples d'application linéaires pour voir au cas par cas quels sont les noyaux : dans $\mathbb{R}^2$, il n'y a (presque) que des multiplications par un scalaire (homothéties), composées avec rotations, symétries et projection. Le noyau, c'est les éléments qui sont envoyés sur 0 : pour une homothétie (de rapport non nul), une rotation, ou une symétrie, seul 0 est envoyé sur 0. Pour une projection, tout ce parallèlement à quoi vous projetez est envoyé sur 0 : le noyau est non nul, et ce n'est pas injectif (c'est clair qu'un point hors de la droite sur laquelle vous projetez, et son projeté ont même image : contredisant l'injectivité).

Question 1.2. — Pourquoi cette affirmation "Comme l'espace de départ de f et son espace d'arrivée ont même dimension, f est surjective si, et seulement si, elle est injective. Donc, f n'est pas surjective." dans l'exercice 5.3 2 est vraie ? Quel est le lien entre injectivité et surjectivité ?

Evidemment en général il n'y a pas de lien entre injectivité et surjectivité, ce sont deux notions qui n'ont à priori rien à voir, même pour les applications linéaires. Il y a des application injectives non surjective : par exemple l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

d'une droite (ici l'axe des abcisses, mais n'importe quelle droite) dans $\mathbb{R}^2$, et des applications surjective non injectives, comme par exemple une projection, disons la projection sur l'axe (O_y),

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

(ou la projection sur n'importe quel sous-espace vectoriel, attention que l'espace d'arrivé doit être l'espace sur lequel on projette, par exemple la projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y) \end{array}$$

est la "même" application qu'avant, la projection sur l'axe (O_y), mais on n'a pas mis le même espace d'arrivée : elle n'est pas surjective : son image est seulement l'axe (O_y) et pas tout $\mathbb{R}^2$, et elle n'est pas injective non plus). Et il y a des application ni injective ni surjective, comme celle qu'on vient de donner, ou l'application nulle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,0) \end{array}$$

et des applications surjectives et injectives (on dit bijectives) comme l'identité dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

ou par exemple une symétrie, ici dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,-y,z) \end{array}.$$

Donc ces notions ne sont pas non plus des notions contraires (bien au contraire, justement, dans le cas favorable suivant).

Mais il y a quand même un cas (qui sera en fait relativement courant jusqu'à la L3 au moins) où les deux notions se relient : c'est quand on a une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et que E et F ont même dimension finie (c'est le cas en particulier si $E = F$, de dimension finie, et en particulier pour les matrices *carrés*). Pourquoi dans ce cas on peut relier injectivité et surjectivité ? Un truc à bien comprendre, c'est que pour une application linéaire, f injective est équivalent à $\ker f = \{0\}$ (c'est la première question de cette page), autrement dit si $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et f surjective équivalent à $\operatorname{Im} f = F$ i.e. à

$\dim \operatorname{Im} f = \dim F$. C'est assez facile à voir, et c'est dans le cours. Qu'est ce qui relie les deux ? Le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Donc si $\dim E = \dim F$, et si f surjective, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim F = \dim E$, donc $\dim \operatorname{Ker} f = \{0\}$ par le théorème du rang i.e. f injective. Si $\dim E = \dim F$ et f injective, i.e. $\dim \ker f = 0$, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim F$, donc f surjective.

C'est seulement si $\dim E = \dim F$ que l'on peut appliquer ce raisonnement ! Faites attention aussi que dans le théorème du rang c'est la dimension de E, l'espace de départ qui apparait : pas F, lui n'apparait jamais !

Une remarque sur d'où vient ce théorème de façon beaucoup plus élémentaire : oublions les espaces vectoriels et application linéaire, et soit X, Y deux ensembles FINIS, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction (i.e. une « machine » qui à tout élément x de X associe un (unique) élément $f(x)$ de Y). Vous savez que f injective signifie que si x et y sont différent, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont différent, et f surjective signifie que pour tout y dans Y, il existe un (ou plusieurs) $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Si X et Y sont finis de même cardinal (i.e. ont le même nombre d'éléments), alors f est injective si et seulement si elle est surjective : c'est évident : il faut envoyer chaque élément de X sur un élément de Y, et si f est injective, on ne peut pas envoyer deux éléments differents sur le même : on n'a donc pas le choix, tout élément de y est l'image d'un élément. Réciproquement si f est surjective, et que X et Y ont autant d'éléments, si deux éléments de X sont envoyés sur le même élément de Y, alors on a au plus $|X| - 1$ (nombre d'éléments de $X - 1$) choix pour leurs images : donc au moins un élément de Y n'est pas image d'un élément de X, i.e. f n'est pas surjective : impossible. Vous voyez dans ce raisonnement qu'il est crucial que X et Y aient le même nombre d'éléments : c'est pareil que l'égalité $\dim E = \dim F$ dans le cas des EV.

Valentin Hernandez, Bureau 3il, LMO, Orsay • *E-mail :* `valentin.hernandez@math.cnrs.fr`