QUESTIONS DU TD M103 DU 22/03

par

Valentin Hernandez

1. Question

Question 1.1. — Qu'est ce qu'un supplémentaire et comment en trouve t'on un ?

Si V un espace vectoriel, et $F \subset V$ est un SEV, un supplémentaire est un SEV G de V tel que

1. $F \cap G = \{0\}$
2. $F + G = V$.

Dans ce cas on note $F \oplus G = V$ (le cercle autour de $+$ signifiant $F \cap G = \{0\}$.

Remarque 1.2. — Si V est de dimension finie, on peut modifier les deux propriétés à vérifier par :

1. $F \cap G = \{0\}$
2. $\dim F + \dim G = \dim V$.

qui sont en pratique plus simple à vérifier. En effet supposons les deux propriété de la définition, alors $\dim F + \dim G = \dim(F + G) - \dim(F \cap G) = \dim V - 0 = \dim V$ on a donc bien les deux propriété annoncés. Réciproquement supposons $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim V$, alors $F + G \subset V$ et on veut voir qu'il y a égalité, regardons les dimensions :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G = \dim V,$$

donc on a égalité des dimensions, donc $F + G = V$ et F, G sont bien supplémentaires.

Comment en trouve t'on un ? En pratique c'est comme ça qu'on fait : on choisit une base $(v_1, \ldots, v_r)$ de F, on la complete en une base $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ de V (c'est toujours possible, il y a une infinité de choix – sauf si $F = V$ evidemment). Alors un supplémentaire est donné par $G = \mathrm{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ (Exercice : vérifier que $F \cap G = \{0\}$ vient du fait que $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ est libre, et que $F + G = V$ vient du fait que $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ est génératrice de V.)

Donc en pratique il suffit de compléter une famille libre $(v_1, \ldots, v_r)$ en une base de V : pour ça le plus simple (pour vérifier qu'on a bien une base) est de rajouter $n - r = \dim V - \dim F$ vecteurs de la base canonique, bien choisis !.

2. Question

Question 2.1. — Si P, Q sont des polynômes et $a < b$ deux réels. Pourquoi si $P(x) = Q(x)$ sur $[a, b]$, alors $P = Q$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $P = Q$?

Soit

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$$

deux polynômes. Remarquez qu'on peut, quitte à supprimer les derniers termes, supposer que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, ce qu'on suppose donc. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut évaluer P en x : $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et le comparer avec $Q(x)$.

Proposition 2.2. — *Tout d'abord remarquons que pour $c \in \mathbb{R}$, $P(c) = 0$ si et seulement si P est un multiple du polynôme (de degré 1) $X - c$, c'est à dire qu'il existe un polynome S tel que*

$$P(X) = (X - c)S.$$

Démonstration. — Si $P(X) = (X - c)R$, alors on a bien $P(c) = (c - c)R(c) = 0$. Et réciproquement ? Je dis qu'en général je peux toujours écrire $P = (X - c)S + R$ avec S un polynôme, et R un polynôme de degré < 1, c'est à dire une constante. C'est la division euclidienne de P par $X - c$, mais en fait on peut le faire à la main : si $c = 0$ alors

$$P = X(a_n X^{n-1} + a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0,$$

et $S = a_n X^{n-1} + a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$ et $R = a_0$ conviennent. Sinon, on pose $Y = X - c$, alors comme $X^k = (Y + c)^k$ est un polynôme en Y, on a que $P(X) = P(Y + c)$ est un polynôme en Y, on peut donc écrire

$$P(X) = P(Y + c) = a'_0 + a'_1 Y + \ldots a'_n Y^n,$$

pour certains coefficients $a'_i \in \mathbb{R}$ (vous pouvez les calculer récursivement si vous voulez, par exemple $a'_n = a_n$ en regardant le facteur de X^n quand on développe $Y^n = (X - c)^n$). D'après ce qui précède quand $c = 0$, on peut écrire

$$P(Y + c) = Y(a'_n Y^{n-1} + \cdots + a'_1) + a'_0.$$

que vaut a'_0 ? On peut évaluer en $Y = 0$: $P(0 + c) = P(c) = 0 + a'_0$ donc $a'_0 = P(c)$. Notant $S'(Y) = a'_n Y^{n-1} + \cdots + a'_1$, et en remplaçant Y par $X - c$, on en déduit donc que

$$P(X) = (X - c)S(X) + P(c),$$

où on a noté $S'(X+c) = S(X)$ car $S'(X+c)$ est un polynôme en X. Donc si $P(c) = 0$ on a $P(X) = (X-c)S(X)$, i.e. $X - c$ divise P. $\square$

Supposons que $P(c) = 0$ quel est le degré de S ? Et bien S est de degré $n-1$ (puisque $n = \deg P = \deg((X-c)S) = \deg X - c + \deg S$ et $X - c$ est de degré 1).

Proposition 2.3. *— Supposons que P, de degré n, s'annule en $n+1$ racines distinctes $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Alors $P = 0$.*

Démonstration. — Si P est de degré 0, i.e. est une constante, alors si il s'annule... il est nul (une constante est.. .constante). Par récurrence supposons $n \geq 1$ et que le résultat est vrai pour tous les polynomes de degré $n-1$. Soit P de degré n s'annulant en $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. D'après ce qui précède, comme P s'annule en x_n, on a $P = (X - x_n)S(X)$, avec $\deg S = n - 1$. De plus, pour $i < n$,

$$0 = P(x_i) = (x_i - x_n)S(x_i)$$

par hypothèse. Or $x_i \neq x_n$, donc $S(x_i) = 0$. Donc S s'annule en $x_0 < x_1 < \dots x_{n-1}$, c'est à dire en n racines distinctes. Or $\deg S = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence, $S = 0$, et donc $P = 0$. $\square$

On en déduit donc le résultat suivant : Si deux polynômes P, Q de degré $\leq n$ sont égaux en $n+1$ valeurs distinctes $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, alors $P = Q$. En effet, on regarde $P - Q$, qui est encore un polynôme, et encore de degré $\leq n$, et il s'annule en $n+1$ valeurs distinctes : d'après ce qui précède $P - Q = 0$ donc $P = Q$.

En particulier si $a < b$ et P, Q sont égaux sur $[a, b]$, comme $[a, b]$ est un ensemble infini, ils ont mêmes valeurs sur $n+1$ réels distincts : donc $P = Q$, c'est à dire $n = m$ et $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. Donc $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Valentin Hernandez, Bureau 3il, LMO, Orsay • *E-mail :* `valentin.hernandez@math.cnrs.fr`