QUESTIONS DU TD M103 DU 19/03

par

Valentin Hernandez

0.1. Question. — Comment relier la dimension d'un espace vectoriel au nombre d'inconnus secondaires ou principales d'un système ?

Il faut faire attention puisqu'il y a deux cas possibles différents ! Notons V un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel.

— Le premier cas, c'est lorsque F est donné par $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ pour une famille $v_1, \ldots, v_r \in V$. Dans ce cas si on cherche la dimension de F, on regarde les vecteurs de F, i.e. les éléments f qui s'écrivent $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$, i.e. on cherche à résoudre $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = f$ pour un $f \in V$. En regardant les coordonnées, on peut alors écrire un système, par exemple dans R^3, avec $f = (a, b, c), r = 4$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 v_{1,1} + \lambda_2 v_{2,1} + \lambda_3 v_{3,1} + \lambda_4 v_{4,1} & = & a \\ \lambda_1 v_{1,2} + \lambda_2 v_{2,2} + \lambda_3 v_{3,2} + \lambda_4 v_{4,2} & = & b \\ \lambda_1 v_{1,3} + \lambda_2 v_{2,3} + \lambda_3 v_{3,3} + \lambda_4 v_{4,3} & = & c \end{array} \right.$$

On peut alors échelonner le système, et comme on cherche une solution pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, on peut supprimer les inconnus secondaires (i.e. les poser $= 0$) on aura quand même une solution si $f \in F$. Autrement dit, f sera engendré seulement sur les inconnues principales et donc les vecteurs correspondant aux inconnues principales forment une famille génératrice (en fait une base, sinon s'il y avait un vecteur "en trop" on pourrait l'écrire en fonction des autres, et l'inconnu λ_i correspondant serait... une inconnue secondaire). Dans ce cas une base de F correspond aux inconnues principales (les v_i devant les pivots λ_i), donc $\dim F$ est le nombres d'inconnues principales !

— L'autre cas c'est lorsque F est donné par des équations ! Autrement dit, F correspond à un système, par exemple dans $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 4y + t & = & 0 \\ y + 3z + 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas on échelonne réduit le système, on trouve,

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -4z-5t \\ y & = & -3z-4t \end{array}\right.$$

On peut alors écrire une solution de ce systeme, i.e. un vecteur de F comme

$$\left(\begin{array}{c} -4z-5t \\ -3z-4t \\ zt \end{array}\right) = z\left(\begin{array}{c} -4 \\ -3 \\ 10 \end{array}\right) + t\left(\begin{array}{c} -5 \\ -4 \\ 01 \end{array}\right).$$

Autrement dit cette famille de 2 vecteur engendre F (libre est vérifiée grâce à $(1,0)$ et $(0,1)$ pour les deux dernières coordonnées) : dans ce cas une base de F corresponds aux inconnues secondaires (le vecteur devant z et celui devant t !), donc $\dim F$ est le nombre d'inconnues secondaires. Par contre, contrairement au cas précédent, la base ne se voit pas "dès le début" meme en sachant qui sont les inconnues principales et secondaire : il faut réécrire les inconnues principales en fonction des secondaires, pour faire sortir les vecteurs

$$\left(\begin{array}{c} -4 \\ -3 \\ 10 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c} -5 \\ -4 \\ 01 \end{array}\right)$$

dans l'exemple.

Evidemment c'est deux possibilités sont "duales" dans le premier cas vous cherchez à comprendre les combinaisons linéaires $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$, et donc celles qui vérifient $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ "ne comptent pas" (elles correspondent au vecteur nul $0 \in F$ donc ne contribue pas à la dimension de F), alors que dans le second cas, vous écrivez justement F comme les (x, y, z, t) tels que

$$x\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right) + y\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right) + z\left(\begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array}\right) + t\left(\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right) = 0,$$

donc toutes vos combinaisons linéaires sont nulles, et ce qui contribue à la dimension ce sont les variables secondaires !

0.2. Question. — Supposons que l'on connaisse une base de E et de F deux s.e.v. de V, comment trouve t'on une base de $E \cap F$?

Il faut voir ce qu'est $E \cap F$: c'est les vecteurs qui sont dans E ET dans F. Notons u_1, u_2, u_3 une base de E (par exemple) et v_1, v_2 une base de F, autrement dit les vecteurs de $E \cap F$ sont les vecteurs v qui s'écrivent $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ ET $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, autrement dit il suffit de trouver λ_i, μ_i tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2,$$

c'est à dire

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 - \mu_1 v_1 - \mu_2 v_2 = 0,$$

c'est à dire que l'on cherche à résoudre un système $= 0$ (avec donc 5 inconnues ici) comme dans le second point de la question précédente ! Sa dimension est donc le nombre d'inconnues secondaires MAIS il faut échelonner réduire le système pour en trouver une base !

0.3. Question. — Pour trouver un supplémentaire d'un SEV F dans un espace vectoriel V, doit-on toujours "prendre" des vecteurs de la base canonique ?

A priori non : il faut simplement trouver un autre SEV G tel que $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = V$ (ou, de manière équivalente, $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim V$). Rien ne dit que G sera engendré par des vecteurs de la base canonique ! Prenons un exemple : $V = \mathbb{R}^2$, $F = Vect((1,1))$ la droite d'équation $y = x$. C'est un un sev de V (c'est la droite de coefficient directeur 1, i.e. d'angle 45°). Alors un supplémentaire est donné par exemple par $G = Vect((1,-1))$, qui est la droite de coefficient directeur -1, qui est aussi la perpendiculaire à F passant par $(0,0)$. Bien sur G n'est pas engendré par un vecteur de la base canonique ! Les seuls droites engendrées par les vecteurs de la base canonique sont (Ox) l'axe des abcisses, engendré par $(1,0)$ et (Oy) l'axe des ordonnées, engendré par $(0,1)$. Par contre, F et (Ox) (ou F et (Oy)) sont bien en somme directe : leur intersection est $\{0\}$ (l'origine), et evidemment les dimensions coincident :

$$\dim F + \dim(Ox) = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

On peut aussi prouver directement que $F + (Ox) = \mathbb{R}^2$: Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in Ox}.$$

Remarquez qu'on peut aussi montrer que $F + G = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \end{pmatrix}}_{\in G}.$$

Mais en fait, on peut TOUJOURS s'en sortir en rajoutant des éléments de la base canonique (bien choisis !). En effet si $F \subset V$, $F \neq V$, on peut trouver un supplémentaire G de la forme $Vect(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ en choisissant (correctement) $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}$ des vecteurs de la base canonique ($r = \dim V - \dim F$). En effet si ce n'était pas le cas, si on ne pouvait pas trouver r vecteurs de la base canonique qui ne sont pas dans F, alors ça voudrait dire qu'il y a au plus $r-1$ tels vecteurs qui ne sont pas dans F, autrement dit que dans F on les a tous, sauf au plus $r-1$, autrement dit qu'on en a au moins ... $\dim V - (r-1) = \dim F + 1$, donc F contiendrai une famille libre de $\dim F + 1$ vecteurs... impossible ! Ça contredit la dimension de F.

Bref : vous n'êtes pas obligé de choisir des vecteurs de la base canonique, MAIS, ça simplifie les calculs (les vecteurs de la base canonique ont plein de zéros, et juste un 1), et ça marche à tous les coups ! Pourquoi s'en priver ?

Valentin Hernandez, Bureau 3i1, LMO, Orsay • *E-mail :* valentin.hernandez@math.cnrs.fr