QUESTIONS DU TD M103 DU 16/03

par

Valentin Hernandez

0.1. Question. — Qu'est-ce qu'une relation de dépendance linéaire, et comment en trouve t'on une ? En particulier pour la question 1 de l'exercice 4.

Si V est un espace vectoriel. Une ***relation de dépendance linéaire*** entre des vecteurs $v_1, \dots, v_r \in V$, est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_r$ qui vaut le vecteur nul, i.e. une égalité

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0.$$

Une telle relation est non triviale si tous les λ_i ne sont pas nul, i.e. il existe un i tel que $\lambda_i \neq 0$. C'est les seules qui nous intéresseront. Par exemple, $v_1, \dots, v_r$ est libre si, et seulement si, il n'existe pas de relation de dépendance linéaire non triviale entre les v_i.

Comment en trouve t'on une (non triviale) ? Il suffit de soit deviner une telle relation, parfois c'est simple par exemple pour $u = (1,0,0)$ et $v = (3,0,0)$, soit de résoudre l'équation

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0,$$

en introduisant le système associé : on peut alors le mettre sous forme échelonnée, puis trouver une solution non triviale "en remontant". Par exemple, dans la correction de la question 1 de l'exercice 4, on arrive au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu + 2\gamma + & = & 0 \\ \mu + \gamma + \delta & = & 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -\mu - 2\gamma \\ \mu & = & -\gamma - \delta \end{array} \right.$$

On peut alors fixer les valeurs que l'on veut pour γ et δ (c'est tout l'interet des inconnus secondaires), par exemple $\gamma = 0, \delta = 1$. On en déduit donc (2e équation) que $\mu = -1$, puis en remontant, la première équation donne $\lambda = 1$. Autrement dit $(1,-1,0,1) = (\lambda, \mu, \gamma, \delta)$ est une solution, i.e.

$$1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 = u_1 - u_2 + u_4 = 0,$$

c'est une relation de dépendance linéaire non triviale !

Valentin Hernandez, Bureau 3il, LMO, Orsay • *E-mail :* valentin.hernandez@math.cnrs.fr