QUESTIONS DU TD M104 DU 26/03

par

Valentin Hernandez

1. Question

Question 1.1. — Comment utiliser un DL pour montrer que f est prolongeable par continuité ? que f est dérivable en un point ?

Supposons que f soit donnée par un quotient de fonctions, disons g,h dérivables et $f = \frac{g}{h}$, définies sur un intervalle I et $a \in I$ tel que f est définie sur $I \backslash \{a\}$. C'est par exemple le cas si $h(a) = 0$.

On veut voir si f est prolongeable par continuité en a, si elle est dérivable en x (i.e. sa dérivée f', définie sur $I \backslash \{a\}$ à priori se prolonge en a). On écrit alors un développement limité de g et de h, et on essaie de faire le quotient : si on arrive à écrire un DL de f en a, i.e.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

que l'on peut aussi écrire, en posant $x = a + h$, au voisinage de $h = 0$,

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon'(h), \quad \varepsilon' \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

alors on voit que lorsque h tend vers 0, i.e. lorsque x tend vers a, $f(x)$ tend vers a_0 : c'est gagné, f se prolonge par continuité en a en posant $f(a) = a_0$. Si par contre le DL de h "a trop de coefficients nuls" par rapport à celui de g, par exemple

$$f(a+h) = \frac{1 + h^2 + h^2\varepsilon(h)}{h + h^2 + h^2\varepsilon(h)} = \frac{1}{h}(1 + h^2 + h^2\varepsilon(h))(1 - h + h\varepsilon(h)) = \frac{1}{h}(1 - h + h\varepsilon(h)),$$

ou

$$f(a+h) = \frac{h^2 + 3h^3 + h^5\varepsilon(h)}{h^4 + h^5\varepsilon(h)} = \frac{1}{h^2}(1 + 3h + h^2\varepsilon(h))(1 - h\varepsilon(h)) = \frac{1}{h^2}(1 + h\varepsilon(h)),$$

dans ces deux cas on voit que f ne se prolonge pas en a, puisqu'il n'y a pas de limite quand $h \to 0$.

Pour la dérivée, supposons donc que f se prolonge, et il suffit de voir si le taux d'accroissement de f en a a une limité. Or reprenons le DL de f :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

alors le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h) - a_0}{h} = a_1 + \cdots + a_n h^{n-1} + h^{n-1} \varepsilon(h).$$

a donc une limite quand h tend vers 0, qui vaut a_1 : on peut donc prolonger f' en a en posant $f'(a) = a_1$. Remarquez que ce n'est possible que si vous avez un DL de f en a au moins à l'ordre 1, donc ça dépend de l'ordre des DL que vous pouvez écrire de g et h.

Valentin Hernandez, Bureau 3il, LMO, Orsay • *E-mail :* valentin.hernandez@math.cnrs.fr