Mathématiques M104, L1 MPI S2 Vos chargés de TD, Paris-Sud 2019–2020

CORRIGÉ DE LA FEUILLE 6

0.1 Etude d'une courbe paramétrée.

Exercice 1. *On étudie la courbe* $\phi : t \longmapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$.

1. *Evidemment* $\cos, \sin$ *sont périodiques de période* 2π*, donc on peut se contenter d'étudier la courbe pour* $t \in [-\pi, \pi]$*. De plus,*

   (a) $\cos$ *est paire et* $\sin$ *est impaire donc changer* t *en* $-t$ *revient à appliquer la symétrie d'axe l'axe des abscisses à* $\phi(t)$*. On peut donc se ramener à* $[0, \pi]$.

   (b) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ *et* $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ *donc* $\phi(\pi - t)$ *est le symétrique de* $\phi(t)$ *par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc se contenter de faire l'étude sur* $[0, \pi/2]$ *(puisque* $t \mapsto \pi - t$ *envoie* $[0, \pi/2]$ *sur* $[\pi/2, \pi]$*).*

   (c) *Enfin* $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$*. Autrement dit* $\phi(\frac{\pi}{2} - t)$ *est le symétrique de* $\phi(t)$ *par rapport à la droite d'équation* $y = x$*. On peut donc se contenter d'étudier* ϕ *sur* $[0, \frac{\pi}{4}]$*, le reste de la courbe s'en déduisant par les symétries précédentes et périodicité.*

2. *On a évidemment*

$$x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t).$$

Donc $x'(t)$ *est négative sur* $[0, \pi/4]$ *et donc* x *est décroissante sur cet intervalle. De même* $y'(t)$ *y est positive donc* y *y est croissante. Un vecteur tangeant en* t *étant donné par* $(x'(t), y'(t))$ *lorsque celui-ci est non nul (i.e.* $\phi(t)$ *régulier) on en déduit en* $t = \pi/4$ *le vecteur*

$$v(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}),$$

en $t = 0$ *par contre* $(x'(0), y'(0)) = (0, 0)$*, ce qui signifie que le point* $\phi(0)$ *est singulier. Essayons de trouver sa tangeante en regardant la limite des vecteurs*

$$u(t) = \frac{\phi(t) - \phi(0)}{||\phi(t) - \phi(0)||},$$

c'est à dire, puisque $\phi(0) = (1, 0)$*, de*

$$(\frac{\cos^3(t) - 1}{\sqrt{(\cos^3 - 1)^2 + \sin^6(t)}}, \frac{\sin^3(t)}{\sqrt{(\cos^3 - 1)^2 + \sin^6(t)}}).$$

Comme c'est une forme indéterminée, on peut faire un developpement limité (ou en fait des équivalents seraient plus appropriés). Un DL de $\cos^3(t) - 1$ *est* $-\frac{3}{2}t^2 + t^2\ \varepsilon(t)$ *et* $\sin^3(t)$ *est* $t^3 + t^3\,\varepsilon(t)$*, on en déduit un DL de*

$$(\cos^3(t) - 1)^2 + \sin^6(t) = \frac{9}{4}t^4 + t^4\,\varepsilon(t) + t^6 + t^6\,\varepsilon(t) = \frac{9}{4}t^4 + t^4\,\varepsilon(t).$$

On en déduit qu'un DL du quotient

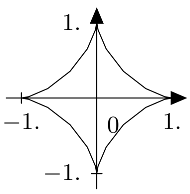
$$\frac{\cos^3(t) - 1}{\sqrt{(\cos^3 - 1)^2 + \sin^6(t)}} = \frac{\frac{-3}{2}t^2 + t^2\,\varepsilon(t)}{\sqrt{\frac{9}{4}t^4 + t^4\,\varepsilon(t)}} = -1\frac{1 + \varepsilon(t)}{\sqrt{1 + \varepsilon(t)}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} -1,$$

et pour l'autre quotient

$$\frac{\sin^3(t)}{\sqrt{(\cos^3 - 1)^2 + \sin^6(t)}} = \frac{t^3 + t^3\,\varepsilon(t)}{\sqrt{\frac{9}{4}t^4 + t^4\,\varepsilon(t)}} = \frac{2}{3}\frac{t + t\,\varepsilon(t)}{\sqrt{1 + \varepsilon(t)}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $u(t)$ *a une limite lorsque* $t \to 0$ *qui est* $v(0) = (-1, 0)$*.*

3. *On a donc un vecteur tangeant* $(-1, 0)$ *en* $(1, 0)$ *et le vecteur* $(-3\frac{\sqrt{2}}{4}, 3\frac{\sqrt{2}}{4})$ *en* $\phi(\pi/4) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$*, on peut en déduire le tracé approximatif puis appliquer les symétries précédentes. Voici le vrai tracé :*



Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5. *On étudie la courbe*

$$\phi : t \longmapsto (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)) = (x(t), y(t)).$$

1. *Les fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont clairement* 2π*-périodiques, de plus* $x(-t) = x(t)$ *car* cos *est paire, et* $y(-t) = -y(y)$ *car* sin *est impaire, on peut donc ramener l'étude à* $[0, \pi]$ *grâce à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.*

2. *On a les dérivées suivantes :*

$$x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t), \quad \textit{et} \quad y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t).$$

De plus on a $x'(t) = 0$ *si et seulement si* $\sin(t) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ *i.e. lorsque* $\sin t = 0$, *i.e.* $t = 0$ *ou* $t = \ \pi$ *ou lorsque* $\cos(t) = \frac{1}{2}$ *i.e.* $t = \arccos(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}3$ *(qui est bien dans* $[0, \pi]$*).*

On a $y'(t) = 0$ *si et seulement si* $\cos(t) = \cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ *i.e.* $\cos(t)$ *est une solution de* $2X^2 - X - 1 = 0$, *c'est à dire* $\cos(t) = 1$ *ou* $\cos(t) = \frac{-1}{2}$, *i.e.* $t = 0$ *ou* $t = \arccos(\frac{-1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$. *Comme* cos *est décroissante et* sin *croissante au voisinage de* $t = 0$, *on en déduit que* $x'(t)$ *est positive de 0 à* $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ *puis négative et* $y'(t)$ *est positive jusqu'à* $\arccos(\frac{-1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ *puis négative. Autrement dit on a que* x *est croissante sur* $[0, \frac{\pi}{3}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ *et* y *est croissante sur* $[0, \frac{2\pi}{3}]$ *et décroissante sur* $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$.

3. *Un point* $\phi(t)$ *est singulier lorsque* $x'(t) = y'(t) = 0$, *or on a justement calculer les valeurs pour lesquelles* x' *et* y' *s'annulent, et ils s'annulent ensemble uniquement (sur* $[0, \pi]$*) lorsque* $t = 0$. *En ce point on a bien* $x'(0) = y'(0) = 0$. *De plus* $\phi(0) = (1, 0)$, *on calcule donc*

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\cos(t) - \cos(2t) - 1)^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2}}(2\cos(t) - \cos(2t) - 1, 2\sin(t) - \sin(2t)),$$

et sa limite lorsque $t \to 0$. *En utilisant les DL de* cos *et* sin *à l'ordre 2 ou 3 on en déduit*

$$2\cos(t) - \cos(2t) - 1 = t^2 + t^2\,\varepsilon(t),$$

$$\sin(t) - \sin(2t) = t^3 + t^3\ \ \varepsilon(t),$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{2\cos(t) - \cos(2t) - 1}{\sqrt{(2\cos(t) - \cos(2t) - 1)^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2}} &= \frac{t^2 + t^2\,\varepsilon(t)}{t^4 + t^4\,\varepsilon(t) + t^6 + t^6\,\varepsilon(t)} \\ &= \frac{t^2}{t^2}\frac{1 + \varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{2\sin(t) - \sin(2t)}{\sqrt{(2\cos(t) - \cos(2t) - 1)^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2}} &= \frac{t^3 + t^3\,\varepsilon(t)}{t^4 + t^4\,\varepsilon(t) + t^6 + t^6\,\varepsilon(t)} \\ &= \frac{t^3}{t^2}\frac{1 + \varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Autrement dit le vecteur tangeant au point $\phi(0) = (1, 0)$ *est* $v(0) = (1, 0)$.

4. *On peut alors faire un tracé approximatif de la courbe en introduisant les points où x est maximal ($\phi(\frac{\pi}{3}) = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$) et y est maximal ($\phi(\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, 3\frac{\sqrt{3}}{2}$) ainsi que les tangeantes en ces points (respectivement vertical et horizontal puisque ce sont des points où x est maximal et y maximal) et en le point $\phi(0) = (1, 0)$ et $\phi(\pi) = (-3, 0)$. Le dessin réel est le suivant :*