Feuille d'exercices 6 : Courbes paramétrées.

0.1 Etude d'une courbe paramétrée

Exercice 1.— Il s'agit d'étudier la courbe paramétrée suivante :

$$t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et de la représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Décrire les symétries possibles de la courbe permettant de réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$. On pourra étudier les transformations suivantes : $t \mapsto t + 2\pi$, $t \mapsto -t$, $t \mapsto \pi - t$ et $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$.
2. Soit $x(t) = \cos^3 t$ et $y(t) = \sin^3 t$. Calculer les dérivées de x et de y et en déduire leur tableau de variations, ainsi qu'un vecteur directeur de la tangente à la courbe lorsque $t = 0$ et lorsque $t = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire le tracé de la courbe en y représentant les deux tangentes étudiées.

Exercice 2.—Même type d'exercice à chercher entre vous.
Faire de même avec la courbe paramétrée suivante :

$$t \longmapsto (\cos t, \sin \frac{t}{2})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pourra chercher d'autres symétries que dans l'exercice précédent pour réduire le domaine d'étude.

0.2 Etude de points singuliers d'une courbe paramétrée

Exercice 3.—Etude locale, points singuliers.
Trouver les points singuliers des courbes paramétrées suivantes. En chacun de ces points, donner un vecteur directeur de la tangente ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente.

$$(C_1) \begin{cases} x(t) & = t^2 \\ y(t) & = t^5 \end{cases}, \quad (C_2) \begin{cases} x(t) & = 2t^2 \\ y(t) & = t^2 - t^3 \end{cases}$$

Exercice 4.—Même type d'exercice à chercher entre vous.

$$(C_3) \begin{cases} x(t) & = t^5 \\ y(t) & = t^3 \end{cases}, \quad (C_4) \begin{cases} x(t) & = 1 + 2t^2 + t^3 \\ y(t) & = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + t^4 \end{cases}$$

0.3 Etude d'une courbe paramétrée possédant au moins un point singulier

Exercice 5.— Il s'agit d'étudier la courbe paramétrée suivante :

$$t \longmapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et de la représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Décrire les symétries possibles de la courbe permettant de réduire le domaine d'étude.
2. Soit $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$ et $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$. Calculer les dérivées de x et de y et en déduire leur tableau de variations.
3. Quel est le point singulier ? En vous aidant d'un développement limité de x et de y, calculez un vecteur directeur de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. En déduire le tracé de la courbe en représentant les tangentes en quelques points dont le point singulier.

Exercice 6.—Même type d'exercice à chercher entre vous

Faire de même avec la courbe paramétrée suivante :

$$t \longmapsto (\sin t, \frac{\sin t}{2 + \cos t})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.