Mathématiques M104, L1 MPI S2 Vos chargés de TD, Paris-Sud 2019–2020

CORRIGÉ DE LA FEUILLE 5

0.1 Forme algébrique et trigonométrique des complexes

Exercice 1. *1. Pour mettre un nombre complexe z sous forme trigonométrique, on peut calculer le module de z, puis considérer $\frac{z}{|z|}$ qui est un nombre complexe de module 1 et peut donc s'écrire $e^{i\theta}$ pour un certain angle θ à déterminer. On obtient alors $z = |z|e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique. Ainsi $|1+i\sqrt{3}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$ et*

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Donc

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

De même, $|1+i| = \sqrt{2}$ et on a $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

D'où

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. Pour calculer la forme algébrique de Z, on multiplie le dénominateur par son conjugué pour obtenir un dénominateur réel:

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Pour calculer la forme trigonométrique de Z on utilise les formes trigonométriques du numérateur et du dénominateur calculées en 1. ainsi que les propriétés de l'exponentielle (proposition 5.10 du cours):

$$Z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3. La forme trigonométrique de $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$ nous permet par identification des parties réelles et imaginaires d'écrire que

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{Re(Z)}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{Im(Z)}{\sqrt{2}}.$$

L'écriture de Z sous forme algébrique nous permet de conclure:

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

et

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

4. *Pour trouver la forme algébrique de Z^{1000}, on commence par utiliser la forme trigonométrique de Z:*

$$Z^{1000} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1000} = 2^{\frac{1000}{2}}e^{i1000\frac{\pi}{12}}$$

Or $1000 = 16 + 12 \cdot 41 \cdot 2$ donc $1000\frac{\pi}{12} = \frac{16\pi}{12} + \frac{12\cdot 41\cdot 2\pi}{12} = \frac{4\pi}{3} + 41 \cdot 2\pi$ et donc

$$\begin{aligned} Z^{1000} = 2^{500}e^{i\frac{4\pi}{3}} &= 2^{500}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{500}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{499} - i2^{499}\sqrt{3} \end{aligned}$$

qui est la forme algébrique de Z^{1000}.

Exercice 2. 1. *Attention, il y a une coquille dans les majuscules de z_1 et z_2 dans l'énoncé.*

Si $z_1 = a + ib$, alors $|z_1|^2 = a^2 + b^2 = N_1$. De même on a $N_2 = |z_2|^2$.

2. *D'après 1.,*

$$\begin{aligned} N_1N_2 &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (|z_1 \cdot z_2|)^2 \\ &= (Re(z_1 \cdot z_2))^2 + (Im(z_1 \cdot z_2))^2 \end{aligned}$$

est bien une somme de deux carrés d'entiers, puisque le produit de deux nombres complexes à parties réelles et imaginaires entières est un nombre complexe à partie réelle et imaginaire entières. On peut être plus précis et les calculer:

$$z_1z_1 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Donc

$$N_1N_2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 .$$

3. *Supposons que N est la somme de deux carrés.*

   On peut procéder par récurrence.

   La propriété est vraie pour $p = 1$ par hypothèse. Supposons la propriété vraie au rang p et montrons la au rang $p+1$. Si N^p est sommes de deux carrés, alors $N^{p+1} = N \cdot N^p$ est un produit de somme de deux carrés et d'après 2. est aussi une somme de deux carrés. La propriété est vraie au rang $p+1$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. *Écrivons la forme polaire de $\sqrt{3}+i$ (qui est de module 2).*

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{ni\pi/6}.$$

- *$(\sqrt{3}+i)^n$ est un réel si et seulement si $e^{ni\pi/6}$ est égal à 1 ou -1, ie si $n\frac{\pi}{6}\pi \in \mathbb{Z}\pi$. C'est le cas pour $n \in 6\mathbb{Z}$.*

- *$(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si $e^{ni\pi/6}$ est égal à i ou $-i$. C'est le cas si $n\frac{\pi}{6} \in \frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi$ ie $n = 3+6\mathbb{Z}$.*

Remarque. *On pouvait deviner ces résultats en regardant le cercle trigonométrique.*

0.2 Racines carrées et racines de polynônes de second degré

Exercice 4. ***Indication:*** *Relire bien la démonstration de la proposition 5.7 du poly, et adapter le calcul selon les cas.*

- *Calcul des racines carrées $x+iy$ de $z = 15-8i$.*
  Les trois équations à résoudre sont $x^2-y^2 = \Re z = 15$, $x^2+y^2 = |z| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{17^2} = 17$ et $2xy = \Im z = -8$ (cette dernière donne en particulier que x et y sont de signe opposés). Ce qui donne donc

  $$x = \pm\sqrt{\frac{15+17}{2}} = \pm 4 \quad et \quad y = \mp\sqrt{\frac{-15+17}{2}} = \mp 1.$$

  Ainsi, les racines carrées de z sont $4-i$ et $-4+i$.

- *Calcul des racines carrées $x+iy$ de $z = 1+i\sqrt{3}$.*
  La forme trigonométrique de z est $z = 2e^{i\pi/3}$. On en déduit les deux racines carrées

  $$\sqrt{2}e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

  et

  $$-\sqrt{2}e^{i\pi/6} = -\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- *Calcul des racines carrées* $x+iy$ *de* $z=3+4i$.
  Les trois équations à résoudre sont $x^2-y^2=3$, $x^2+y^2=4$ *et* $2xy=4$.
  Les réels x *et* y *sont de même signes donc les racines carrées de* z *sont les complexes*

$$\pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}}+i\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right)$$
$$=\pm(2+i).$$

Exercice 5 (A faire entre vous). • *Calcul des racines carrrées de* $z=9-6i$.
Sa partie imaginaire est négative donc les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z *sont de signe opposé. Sa norme est égale à* $|9-6i|=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}=\sqrt{3^2\times 13}=3\sqrt{13}$. *Donc* z *a deux racines carrées:*

$$\pm\sqrt{\frac{9+3\sqrt{13}}{2}}\mp\sqrt{\frac{-9+3\sqrt{13}}{2}}.$$

- *Calcul des racines carrées de* $z=4+3i$.
  Sa partie imaginaire est positive donc les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z *sont de même signe et sa norme est* $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$. *Donc ses racines carrées sont les complexes*

$$\pm\left(\sqrt{\frac{4+5}{2}}+i\sqrt{\frac{-4+5}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- *Calcul des racines carrées de* $z=2+i\sqrt{5}$.
  Sa partie imaginaire est positive donc les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z *sont de même signe et sa norme est* $\sqrt{2^2+\sqrt{5}^2}=\sqrt{9}=3$. *Donc ses racines carrées sont les complexes*

$$\pm\left(\sqrt{\frac{2+3}{2}}+i\sqrt{\frac{-2+3}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 6. • *Résolution de l'équation* $z^2-2iz-1+2i=0 \qquad (E_1)$.
Calcul du discriminant

$$\Delta=(2i)^2-4(-1+2i)=-4+4-8i=-8i=-8e^{-i\pi/2}.$$

Une racine évidente est $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=2-2i$. *Ce qui donne alors les deux solutions*

$$z_1=\frac{-(-2i)+2-2i}{2}=1,$$

et

$$z_1 = \frac{-(-2i)-(2-2i)}{2} = \frac{2i-2+2i}{2} = -1+2i.$$

- *Résolution de l'équation* $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0 \qquad (E_2)$.
  Calcul du discriminant

  $$\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -3-4i.$$

  Sa norme vaut 5. On en déduit une racine carrée δ *de* δ,

  $$\delta = \sqrt{\frac{-3+5}{2}} - i\sqrt{\frac{3+5}{2}} = 1-2i.$$

  On en déduit alors les solutions complexes de (E_2)*:*

  $$z_1 = \frac{-(4i-3)+1-2i}{2i} = \frac{3-4i+1-2i}{2i} = \frac{4-6i}{2i} = -3-2i,$$

  et

  $$z_2 = \frac{-(4i-3)-(1-2i)}{2i} = \frac{3-4i-1+2i}{2i} = \frac{2-2i}{2i} = -1-i.$$

- *Résolution de l'équation* $z^2 - (7+i)z + 12 + 3i = 0 \qquad (E_3)$.
  Le discriminant

  $$\Delta = (7+i)^2 - 4(12+3i) = 2i,$$

  qui a pour racines carrées $1+i$ *et* $-1-i$*. On en déduit alors les solutions complexes de* (E_3)*:*

  $$z_1 = \frac{-(-(7+i))+(1+i)}{2} = \frac{8+2i}{2} = 4+i,$$

  et

  $$z_2 = \frac{-(-(7+i))-(1+i)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Exercice 7 (A faire entre vous)**.** • *Résolution de l'équation:*

$$z^2 - z + \frac{i}{2} = 0 \qquad \text{(ex7-1)}$$

Le discriminant

$$\Delta = 1 - 4\frac{i}{2} = 1-2i,$$

On en déduit une racine

$$\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}},$$

Ce qui donne les solutions complexes de (ex7-1)*:*

$$z_1 = \frac{1+\delta}{2} = \frac{1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{2},$$

et

$$z_2 = \frac{1-\delta}{2} = \frac{1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{2}.$$

- *Résolution de l'équation:*

$$z^2 - (3-i)z + 4 - i = 0 \tag{ex7-2}$$

Le discriminant

$$\Delta = (3-i)^2 - 4(4-i) = -2(4-i),$$

On en déduit une racine

$$\delta = \sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{-4+\sqrt{17}}{2}}\right] = \sqrt{4+\sqrt{17}} - i\sqrt{-4+\sqrt{17}},$$

Ce qui donne les solutions complexes de (ex7-2)*:*

$$z_1 = \frac{3-i+\delta}{2} = \frac{3+\sqrt{4+\sqrt{17}}}{2} - i(1+\sqrt{-4+\sqrt{17}}),$$

et

$$z_2 = \frac{3-i-\delta}{2} = \frac{3-\sqrt{4+\sqrt{17}}}{2} - i(1-\sqrt{-4+\sqrt{17}}).$$

- *Résolution de l'équation:*

$$iz^2 + (1+i)z + 1 = 0, \tag{ex7-3}$$

On remarque que i et -1 sont racines immédiates et on factorise:

$$iz^2 + (1+i)z + 1 = i(z-i)(z+1).$$

Exercice 8.

- *On factorise:*

$$az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2) = az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2,$$

et on identifie les coefficients (ce qui est possible comme a ne s'annule pas!)

- *On applique la formule à l'équation:*

$$z^2 - 2i\sin\theta z - 1 = 0, \tag{ex8-1}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2i\sin\theta \\ z_1 z_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{i\mu}, \ z_2 = e^{i\nu} \\ i(\sin(\mu) + \sin(\nu)) = 2i\sin\theta \\ \mu + \nu = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{i\mu}, \ z_2 = e^{i\nu} \\ \sin(\mu) = \sin\theta \\ \mu + \nu = \pi \end{cases}$$

On obtient finalement,

$$z_1 = e^{i\theta}, \ z_2 = -e^{-i\theta}.$$

- *On applique la formule à l'équation:*

$$z^2 - e^{i\theta} z + \frac{i}{2}\sin(2\theta) = 0, \tag{ex8-2}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = e^{i\theta} \\ z_1 z_2 = \frac{i}{2}\sin(2\theta) = i\cos\theta\sin\theta = i\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

On obtient finalement,

$$z_1 = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta), \ z_2 = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\sin(\theta).$$

0.3 Racine n-ième

Exercice 9. *1. D'après le cours, les racines* 5*-ièmes de l'unité, i.e. les solutions de* $z^5 = 1$*, sont*

$$e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}, 1 = e^{10i\pi/5}.$$

2. D'après le cours, il suffit de choisir une racine de $z^7 = -i$ *(une solution particulière!) et de la multiplier par les racines* 7*-ième de l'unité. Une racine particulière est évidemment* i*. On en déduit que les racines de l'équation* $z^7 = -i$ *sont*

$$ie^{2i\pi/7}, ie^{4i\pi/7}, ie^{6i\pi/7}, ie^{8i\pi/7}, ie^{10i\pi/7}, ie^{12i\pi/7}, i.$$

Notez que comme $i = e^{\pi/2}$*, on peut réécrire cette liste*

$$e^{11i\pi/14}, e^{15i\pi/14}, e^{19i\pi/14}, e^{23i\pi/14}, e^{27i\pi/14}, e^{31i\pi/14} = e^{3i\pi/14}, i.$$

3. *On écrit* $(1+i\sqrt{3}) = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\pi/3}$*, donc* $(1+i\sqrt{3})^4 = 16e^{4i\pi/3}$*.* *Une racine* 5*-ieme particulière est alors*

$$z_0 = 16^{\frac{1}{5}} e^{4i\pi/15}.$$

L'ensemble des solutions de $z^5 = (1+i\sqrt{3})^4$ *est donc*

$$z_0, z_0e^{2i\pi/5}, z_0e^{4i\pi/5}, z_0e^{6i\pi/5}, z_0e^{8i\pi/5},$$

que l'on peut réécrire,

$$16^{\frac{1}{5}}e^{4i\pi/15}, 16^{\frac{1}{5}}e^{10i\pi/15}, 16^{\frac{1}{5}}e^{16i\pi/15}, 16^{\frac{1}{5}}e^{22i\pi/15}, 16^{\frac{1}{5}}e^{28i\pi/15}.$$

4. *Comme pour la question précédente commençons par écrire*

$$(1+i\sqrt{3})^4 = 16e^{4i\pi/3}$$

et

$$(1+i)^2 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2 = 2i$$

on cherche donc les racines 7*-ièmes de* $8e^{4i\pi/3-i\pi/2} = 8e^{5i\pi/6}$*. Une racine particulière est donc* $z_0 = 8^{1/7}e^{5i\pi/42}$*. L'ensemble des racines est donc*

$$z_0, z_0e^{2i\pi/7}, z_0e^{4i\pi/7}, z_0e^{6i\pi/7}, z_0e^{8i\pi/7}, z_0e^{10i\pi/7}, z_0e^{12i\pi/7},$$

que l'on peut réécrire

$$8^{1/7}e^{5i\pi/42}, 8^{1/7}e^{17i\pi/42}, 8^{1/7}e^{29i\pi/42}, 8^{1/7}e^{41i\pi/42}, 8^{1/7}e^{53i\pi/42}, 8^{1/7}e^{65i\pi/42}, 8^{1/7}e^{77i\pi/42}.$$

Exercice 10.

-
-
-

Exercice 11.

1. *D'après le cours, les racines de* $z^7 - 1$ *sont*

$$z_0 = e^{2i\pi/7}, e^{4i\pi/7}, e^{6i\pi/7}, e^{8i\pi/7}, e^{10i\pi/7}, e^{12i\pi/7}, 1.$$

2. *On reconnait les termes d'une suite géométrique de raison* $z_0 \neq 1$*, on a donc*

$$\sum_{k=0}^{6} z_0^k = \frac{z_0^7 - 1}{z_0 - 1} = 0$$

puisque $z_0^7 = 1$*.*

3. *On calcule,*

$$A + B = \sum_{k=1}^{6} z_0^k = -1$$

d'après la question précédente. De plus, on développe

$$AB = 3 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 + z_0^5 + z_0^6 = 2$$

encore d'après la question précédente.

4. *Le polynome de degré 2,*

$$(X - A)(X - B) = X^2 - (A + B)X + AB,$$

qui a pour racine A et B s'écrit donc

$$X^2 + X + 2.$$

On peut aussi calculer ses racines directement :

$$\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2,$$

donc les racines sont

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}, z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

On a donc $\{A, B\} = \{z_1, z_2\}$, reste à savoir si $A = z_1$ et $B = z_2$ ou $A = z_2$ et $B = z_1$. Regardons les parties imaginaires. La partie imaginaire de z_1 est négative et celle de z_2 positive. La partie imaginaire de $A = z_0 + z_0^2 + z_0^4$ est elle aussi positive : $z_0 = e^{2i\pi/7}$, donc $z_0^4 = e^{8i\pi/7} = -e^{i\pi/7}$ Donc $\mathrm{im}(z_0 + z_0^2 + z_0^4) = sin(2\pi/7) + sin(4\pi/7) - sin(\pi/7)$. Or $\sin$ est croissante sur $[0; \pi/2]$ et positive sur $[0, \pi]$ donc $\mathrm{im}(A) \geq sin(4\pi/7) > 0$. Donc $A = z_2$ et $B = z_1$.

Exercice 12. *1.*

2.

3.

4.

5.

6.

0.4 Pour aller plus loin

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15. *1. Les racines n-ième de l'unité, c'est-à-dire les solutions de l'équation* $z^n = 1$*, s'écrivent* $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* k *entier,* $0 \leq k \leq n-1$.

On propose une première méthode pour calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$.

On remarque d'abord que $\omega_k = \omega_1^k$*. On a donc :*

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k &= 1 \times \omega_1 \times \omega_1^2 \times \omega_1^3 \times \cdots \times \omega_1^{n-1} \\
&= \omega_1^{1+2+3+\cdots+n-1} \\
&= \omega_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{\frac{2i\pi}{n}.\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= e^{i\pi(n-1)} \\
&= (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

(Une deuxième méthode, un peu hors-programme, consiste à factoriser $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$*. On fait* $z = 0$ *et on obtient* $-1 = \prod_{k=0}^{n-1}(-\omega_k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$ *et le résultat.)*

2. On écrit pour p *entier :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\,\frac{2p\pi}{n}})^k.$$

On reconnaît une somme dont les termes sont en progression géométrique. Il y a deux cas suivant que la raison vaut 1 *ou est différente de* 1.

1er cas : si p *est un multiple de* n *alors la raison* $e^{i\,\frac{2p\pi}{n}}$ *vaut* 1 *et la somme vaut* $\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

2e cas : si p *n'est pas un multiple de* n*, on utilise la formule bien connue d'une somme de termes en progression géométrique et on obtient :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\,\frac{2p\pi}{n}})^k = \frac{(e^{i\,\frac{2p\pi}{n}})^n - 1}{e^{i\,\frac{2p\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i2p\pi} - 1}{e^{i\,\frac{2p\pi}{n}} - 1} = 0.$$

3. *On utilise la formule du binôme de Newton* $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$*, vraie pour tous réels ou complexes* a *et* b *et tout entier naturel* n *. On en déduit :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1^k + 1)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega_1^{kj} \Big) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kj} \Big)\end{aligned}$$

Or le terme entre parenthèses $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kj}$ *est nul sauf lorsque* j *est un multiple de* n *auquel cas ce terme vaut* n *(voir la question précédente). Mais* j *varie entre* 0 *et* n*. Donc le terme entre parenthèses est nul sauf si* $j = 0$ *ou* $j = n$*. On a donc :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1^k + 1)^n = \binom{n}{0} n + \binom{n}{n} n = 2n.$$

Exercice 16. *1.*

2.

Exercice 17.