

---

## Feuille de TD n°4 : indications

---

### Exercice 1

**Remarque :** L'idée générale est la suivante. On connaît quelques développements limités (DL) de base grâce à la formule de Taylor-Young. Mais le plus souvent, on reconnaît dans la fonction à développer une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions dont on connaît déjà le développement limité. Il faut donc :

- Connaître les DL en 0 de base des fonctions usuelles que sont :  $\frac{1}{1-x}$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sqrt{1+x}$ ,  $(1+x)^\alpha$  où  $\alpha$  est un paramètre réel différent de  $-1$ ,  $\ln(1+x)$ , ... On obtient ces DL grâce à la formule de Taylor-Young par exemple.
- Revoir la section du cours qui concernent la somme, le produit, le quotient, la composée de deux DL.

Voyons quelques indications pour l'exercice 1.

- 1) Ecrire les DL à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{1}{1-x}$  et  $e^x$ . En déduire le DL à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{1}{1-x} - e^x$ .
- 2) Ecrire le DL à l'ordre 3 en 0 de  $\sin x$ , le multiplier par  $x/2$ . On obtient le DL à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{x}{2} \sin x$ . Ecrire alors le DL à l'ordre 4 en 0 de  $\cos x - 1$  et conclure.
- 3) Ecrire le DL à l'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{1+u}$ . En déduire le DL à l'ordre 4 en 0 de  $\sqrt{1+x^2}$  et conclure.
- 4) Il y a une astuce pour s'épargner le produit de deux DL. Connaissez-vous les opérations sur les fonctions trigonométriques (duplication, ...) ?
- 5) A vous de jouer.

### Exercice 2

2) Faire 2) avant 1). Ecrire  $\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1-(x-x^2)}$ . Utiliser le développement de  $\frac{1}{1-u}$  à l'ordre 4 en 0, et poser  $u = x - x^2$ . Ne pas oublier d'envoyer les termes d'ordre supérieur à 4 dans le reste  $x^4\epsilon(x)$  du développement.

1) Ecrire  $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)}$  en remarquant que  $1 - \cos x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Développer  $1 - \cos x$  à l'ordre 4 en 0 et utiliser le développement de  $\frac{1}{1-u}$  pour déterminer le DL à l'ordre de 4 en 0 de  $\frac{1}{\cos x}$ . En multipliant par le DL à l'ordre 4 en 0 de  $\sin x$ , conclure.

4) Attention, il va falloir développer  $\sin x$  à l'ordre 5 en 0 pour obtenir un DL à l'ordre 4

en 0 de  $\frac{\sin x}{x}$  puis de  $\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ .

### **Exercice 3**

Revoir d'abord la section du cours consacrée à l'intégration des DL. Puis remarquer que les fonctions données dans l'exercice ont des dérivées faciles à développer.

### **Exercice 4**

A vous de jouer.