Université Paris–Sud **L1 – Math104**
Mathématiques **2nd semestre 2019-2020**

Feuille d'exercices 4 : Développements limités.

0.1 Calculs de développements limités en 0

Exercice 1.—Sommes et produits
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{1-x} - e^x, \quad \cos x - 1 + \frac{x}{2}\sin x, \quad (x+1)\sqrt{1+x^2}, \quad \sin x\,\cos x, \quad e^x\sqrt{1+x}.$$

Exercice 2.—Quotient et composition
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$\tan x, \quad \frac{1}{1-x+x^2}, \quad \exp(\sin x), \quad \sqrt{\frac{\sin x}{x}}.$$

Exercice 3.—Intégration
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$\ln(x+1), \quad \arcsin x, \quad \arctan x, \quad \int_0^x e^{x^2}\,dt.$$

Exercice 4.—Mêmes types de calculs pour vous entrainer entre vous.
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

$$\ln(x+1)\,\sin x, \quad \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}, \quad \sin x\,\cos x, \quad \ln(\frac{\sin x}{x}),$$

$$e^{x^2}\ln(1-x), \quad \ln\cos x, \quad \exp(\frac{1}{1-x}), \quad \ln(1+x^2), \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

0.2 Application aux calculs de limites, calculs de tangentes et positions relatives en 0.

Exercice 5.—
Calculer les limites (si elles existent) des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\frac{\sin x - x}{x^3}, \quad \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}, \quad \frac{2x}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}, \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1}.$$

Exercice 6.—Mêmes types de calculs pour vous entrainer entre vous.

Calculer les limites (si elles existent) des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0 :

$$\frac{\sin x - x}{x\ \ln(1-x^2)},\quad \frac{e^x - x - \cos x}{x^2},\quad \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2\ln(1+x) - 2x - x^2},\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)},\quad \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 7.— En effectuant un développement limité en 0, à un ordre à déterminer, calculer l'équation de la tangente en 0 du graphe de chacune des fonctions suivantes et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente :

$$f_1(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2},\quad f_2(x) = arcos(x) + \cos(x),\quad f_3(x) = e^{2x-x^2},\quad f_4(x) = \int_0^x e^{x^2}\ dt.$$

Exercice 8.— Pour vous entrainer entre vous, déterminer l'équation de la tangente en 0 du graphe des fonctions des exercices 1 à 4 dont vous avez calculer le DL en 0 et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente.

0.3 Calculs et applications des développements limités en un point autre que 0

Exercice 9.— Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par la formule :

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1}.$$

1. Donner le domaine de définition de f. En effectuant un DL à l'ordre 1 au point $x = 1$ du numérateur, montrer que cette fonction se prolonge par continuité en 1 en une fonction que l'on notera encore f.
2. En effectuant un développement limité à l'ordre 3 du numérateur, montrer que f est dérivable au point 1 et donner l'équation de sa tangente en ce point. L'ordre du développement suffit-il pour déterminer les positions relatives du graphe de f et de cette tangente au voisinage de 1 ?
3. Donner les positions relatives du graphe de f et de cette tangente au voisinage de 1.

Exercice 10.— Déterminer l'équation de la tangente en 1 du graphe des fonctions suivantes et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente en 1 :

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x},\quad g(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{2+x}.$$

Exercice 11.—Exercices du même type pour vous entrainer entre vous Déterminer l'équation de la tangente en x_0 du graphe des fonctions suivantes et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente :

$$f_1(x) = \frac{2+x}{3+x},\ x_0 = -1,\quad f_2(x) = \ln(\sin x),\ x_0 = \frac{\pi}{4},\quad f_3(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2},\ x_0 = 1.$$

0.4 Recherche d'asymptotes et positions relatives.

Exercice 12.— Rechercher les asymptotes des fonctions suivantes et donner les positions relatives du graphe de ces fonctions et de son asymptote :

$$f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}\, e^{\frac{1}{x}}, \quad f_3(x) = \ln(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}).$$

Exercice 13.—Exercices du même type pour vous entrainer entre vous Rechercher les asymptotes des fonctions suivantes et donner les positions relatives du graphe de ces fonctions et de son asymptote :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1}\, e^{\frac{2}{x}} \quad f_2(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2-1}, \quad f_3(x) = \ln(\sqrt{e^x - e^{-x}}2.$$

0.5 Pour aller plus loin : ces exercices sont facultatifs et ne sont à faire que si les précédents sont bien compris

Exercice 14.— Calculer les dérivées n-ièmes en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

Exercice 15.—

1. Démontrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculer le développement limité de $\arctan x$ en 0 à l'ordre 4. en déduire le développement limité de $\arctan x$ en $+\infty$.
3. Calculer l'asymptote en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x^2\,(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$ ainsi que la position du graghe de f par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Exercice 16.— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{x^2}$.

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en déduire (citer le théorème) qu'elle possède un développement limité en 0 à tout ordre.
3. En écrivant que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ calculer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 5 en 0.
4. Résoudre les mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x) = 2\,\tan x - x$ (on précisera le domaine sur lequel g est bijective).