Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y+3z, x+2z, 2x+2y+2z)$. Rang f ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOnc $\text{rg}(f) = 2$ donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y+3z, x+2z, 2x+2y+2z)$. ker f ?

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z & = 0 \\ 2x+y+3z & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ x+2z & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 2x+2y+2z & = 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z & = 0 \\ -y+z & = 0 \\ -y+z & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -2z \\ y & = z \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker f = \{(-2z, z, z) | \ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$.

$\mathrm{rg}(f)$? Théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Kerf = 3 - 1 = 2.$$

PARFOIS on peut trouver un vecteur du noyau plus simplement : par exemple $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - 2y - 3z, 7z)$Donnons la matrice de f

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vous voyez que la première et la deuxieme colonne sont opposés donc $C_1 + C_2 = 0$ Donc $f(e_1 + e_2) = f(1, 1, 0) = 0$. On pouvait le voir directement sur les formules de f !

Comment sait-on qu'une implication linéaire est injective ? Surjective ? Comment le montre t'on ? $f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0.$$

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \operatorname{im} f = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} f := \operatorname{rg}(f) = \dim F.$$

Exemple 1 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+y+3z \\ x+2z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

f surjective ? Non $\mathrm{rg}(f) = 2$ De toute façon si $\dim F > \dim E$ il est IMPOSSIBLE d'avoir f surjective. Pourquoi ? Théorème du rang

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker f \leq \dim E$$

donc $\mathrm{rg}(f) < \dim F$: f pas surjective. f injective ? Non : $\dim \ker f = 1$ (théorème du rang) donc f non injective.

Exemple 2 :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - y + z7z \\ 2x - 2y - 3z \\ 7z \end{pmatrix} \end{array}$$

f surjective ? Non $\mathrm{rg}(f) = 2$ Car Théorème du rang

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$$

donc $\mathrm{rg}(f) < \dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3$: f pas surjective. f injective ? Non : $\dim \ker f = 1$ (vu avant) donc f non injective. Remarque : comme $E = F = \mathbb{R}^3$ le théorème du rang dit

$$\dim \ker f = \dim E - \mathrm{rg}\, f = \dim F - \mathrm{rg}\, f$$

donc $\dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, f = \dim F$ donc f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Matrice de Passage : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases du même espace E.La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits en COORDONNEES dans la base $\mathcal{B}$. Par exemple si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ a simplement pour colonnes les vecteurs de $\mathcal{B}'$
Si $\mathcal{B}$ n'est pas la base canonique mais $\mathcal{B}'$ est la base canonique, alors il est a priori difficile de calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, mais on a

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$[1] mais ni $\mathcal{B}$, ni $\mathcal{B}'$ n'est la base canonique ? Et bien on pose $\mathcal{B}''$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$, et on utilise la formule

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} \times P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}.$$

Maintenant $P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}$ se calcule simplement car au départ $\mathcal{B}''$ est la base canonique, et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$ où $P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$ se calcule facilement !

1. On ne parle pas de base canonique sauf dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans certains autres espaces mais pas en general !)

D'où vient la formule

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} \times P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} ?$$

Supposons que l'on a E, F, G des EV de dimension finie, munies de bases respectives $\mathcal{B}', \mathcal{B}'', \mathcal{B}$ et f, g deux application linéaires comme ceci :

$$\overset{\mathcal{B}'}{E} \xrightarrow{f} \overset{\mathcal{B}''}{F} \xrightarrow{g} \overset{\mathcal{B}'}{G}.$$

On en déduit une application linéaire (par composition)

$$g \circ f : E \longrightarrow G.$$

Quelle est sa matrice ? Peut-on la relier aux matrices de f et g ?

Pour calculer la matrice d'une application linéaire il faut choisir des bases au départ et à l'arrivée : choisissons $\mathcal{B}'$ pour E au départ et $\mathcal{B}$ pour G à l'arrivée. Pour pouvoir relier cette matrice à celle de f et g, il faut choisir pour f $\mathcal{B}'$ au départ pour E et pour g $\mathcal{B}$ à l'arrivée pour G, mais SURTOUT $\mathcal{B}''$ pour F, à l'arrivée pour f et au départ pour g ! Dans ce cas on a

$$Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}(g\circ f) = Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}''}(g)\times Mat_{\mathcal{B}''\leftarrow\mathcal{B}'}(f).$$

En particulier si $E=\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=\mathcal{B}'=\mathcal{B}''$ est la base canonique on en déduit que si f a pour matrice A (bases canoniques), g pour matrice B, alors $g\circ f$ a pour matrice BA ! L'autre cas interressant c'est si $E=F=G=\mathbb{R}^n$ et $f=g=\mathrm{id}$, mais $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}''$ quelconques, on en déduit

$$Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}''}(\mathrm{id})\times Mat_{\mathcal{B}''\leftarrow\mathcal{B}'}(\mathrm{id}), \tag{1}$$

Or comme la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ peut se réécrire

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}(\mathrm{id}),$$

on peut réécrire l'égalité (1) comme

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}\times P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}.$$