Corrigé de la feuille 5

...

Exercice 5.1.— Définition algébrique de la linéarité

1. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille 2. Pour $M \in E$ on pose

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\phi : E \to E$ est linéaire.

Réponse : Premièrement, E est bien un espace vectoriel, soient maintenant $M, N \in E$ et $\mu \in \mathbf{R}$, montrons que $\phi(M + \mu N) = \phi(M) + \mu\phi(N)$, ce qui conclura. En utilisant la distributivité du produit matriciel sur l'addition matricielle, il vient :

$$\begin{aligned}
\phi(M + \mu N) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} (M + \mu N) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} M + \mu \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} N \right) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
&= \phi(M) + \mu\phi(N).
\end{aligned}$$

Finalement, ϕ est une application linéaire.

b. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est un point fixe de ϕ, c'est-à-dire $\phi(A) = A$.

Réponse : Il s'agit simplement de calculer :

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est bien un point fixe de ϕ.

2. Soit E l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré ≤ 2. Pour $P \in E$ on pose $\phi(P) = (P(1), P'(2))$.

a. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}^2$ est linéaire.

Réponse : Premièrement, E est bien un espace vectoriel, soient maintenant $P, Q \in E$ et $\mu \in \mathbf{R}$, montrons que $\phi(P+\mu Q) = \phi(P) + \mu\phi(Q)$, ce qui conclura. En utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, il vient :

$$\begin{aligned}
\phi(P+\mu Q) &= ((P+\mu Q)(1), (P+\mu Q)'(2)),\\
&= (P(1)+\mu Q(1), (P'+\mu Q')(2)),\\
&= (P(1)+\mu Q(1), P'(2)+\mu Q'(2)),\\
&= (P(1), P'(2)) + \mu(Q(1), Q'(2)),\\
&= \phi(P) + \mu\phi(Q).
\end{aligned}$$

Finalement, ϕ est une application linéaire.
b. Calculer $\phi(P)$ pour $P(t) = t-1$ et pour $P(t) = (t-2)^2$. Existe t-il un polynôme P de degré ≤ 2 tel que $P(1) = 1$ et $P'(2) = -1$?
Réponse :

- Posons $P(t) = t-1$, alors $P'(t) = 1$ de sorte que $\phi(P) = (0,1)$.
- Posons $P(t) = (t-2)^2$, alors $P'(t) = 2(t-2)$ de sorte que $\phi(P) = (1,0)$.
- Cela revient à chercher $P \in E$ tel que $\phi(P) = (1,-1) = (1,0) - (1,0)$, en utilisant la linéarité de ϕ (question 2.b.) et les deux calculs qui précèdent, vérifions que

  $$P(t) = (t-2)^2 - (t-1) = t^2 - 5t + 5$$

  convient. En effet, $P(1) = 1$ et comme $P'(t) = 2t-5$, $P'(2) = -1$.

3. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on pose $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^t\,dt$.
a. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}$ est linéaire.
Premièrement, E est bien un espace vectoriel et ϕ est correctement définie, car l'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe. Soient maintenant $f, g \in E$ et $\mu \in \mathbf{R}$, montrons que $\phi(f+\mu g) = \phi(f) + \mu\phi(g)$, ce qui conclura. En utilisant que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales, il vient :

$$\begin{aligned}
\phi(f+\mu g) &= \int_0^1 (f+\mu g)(t)e^t\,\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^1 (f(t)+\mu g(t))e^t\,\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^1 (f(t)e^t + \mu g(t)e^t)\,\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^1 f(t)e^t\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^1 g(t)e^t\,\mathrm{d}t,\\
&= \phi(f) + \mu\phi(g).
\end{aligned}$$

Finalement, ϕ est une application linéaire.

b. Donner deux applications affines $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ distinctes qui sont dans le noyau de ϕ.
Réponse : Premièrement, $0 \in E$ est toujours un élément du noyau d'une application linéaire, donc la fonction constante égale à 0 (qui est bien affine) convient.

Maintenant, cherchons $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $\phi(f\colon t \mapsto a + bt) = 0$, calculons déjà $\phi(f)$ en utilisant une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\phi(f) &= \int_0^1 (a+bt)e^t \,\mathrm{d}t, \\
&= a\int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t + b\int_0^1 te^t \,\mathrm{d}t, \\
&= a[e^t]_0^1 + b\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t\right), \\
&= a(e-1) + b\left(e - [e^t]_0^1\right), \\
&= a(e-1) + b(e-(e-1)), \\
&= a(e-1) + b.
\end{aligned}$$

Ainsi, choisir $a = 1$ et $b = 1 - e$ convient et $t \mapsto 1 + (1-e)t$ est dans le noyau de ϕ.

Exercice 5.2.— Application linéaire associée à une matrice.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ quelconque donner l'expression de $f(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$.
Réponse : Par définition, nous avons :

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 3z - t \\ 2x + y + 3z + 4t \\ -x + 2y - 4z + 3t \end{pmatrix}.$$

Finalement, $f(x, y, z, t) = (x - y + 3z - t, 2x + y + 3z + 4t, -x + 2y - 4z + 3t)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle injective ? surjective ?
Réponse : Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | f(x,y,z,t) = 0\}, \\
&= \{X \in \mathbf{R}^4 | AX = 0\} \subset \mathbf{R}^4,
\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(f) &= \{f(x,y,z,t)|(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4\},\\ &= \{(a,b,c)\in \mathbf{R}^3|\exists (x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4; f(x,y,z,t)=(a,b,c)\},\\ &= \{B\in \mathbf{R}^3|\exists X\in \mathbf{R}^4; AX=B\}\subset \mathbf{R}^3.\end{aligned}$$

Pour déterminer $\ker(f)$, il s'agit de trouver les solutions de $AX = 0$ et pour déterminer $\mathrm{im}(f)$, il s'agit de trouver les B pour lesquels $AX = B$ a une solution, dans les deux cas échelonnons à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -4 & 3\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right. .$$

Tout d'abord, nous effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 3 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} a\\ b-2a\\ a+c\end{pmatrix}\right. .$$

Ensuite, nous effectuons les opérations $L_3 \leftrightarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} a\\ a+c\\ 4a-2b\end{pmatrix}\right. .$$

En prenant $(a,b,c) = (0,0,0)$, il vient :

$$\ker(f) = \{(-2z-5t, z-6t, z, t)|z,t\in \mathbf{R}^2\}.$$

Finalement, une base de $\ker(f)$ est $\{(-5,-6,0,1),(-2,1,1,0)\}$ et comme $\ker(f)\neq\{0\}$, f n'est pas injective.

Remarque 1. L'application linéaire f ne pouvait pas être injective, car la dimension de l'espace de départ de f est strictement plus grande que celle de son espace d'arrivée.

Par ailleurs, le système $AX = B$ est compatible, si et seulement, si $b = a/2$, donc :

$$\mathrm{im}(f) = \{(a, a/2, c)|a,c\in \mathbf{R}^2\}.$$

Finalement, une base de $\mathrm{im}(f)$ est $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ et comme $\mathrm{im}(f)\neq \mathbf{R}^3$, f n'est pas surjective.

Remarque 2. Nous constatons que $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbf{R}^4)$, cette égalité est vraie quel que soit l'application linéaire $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, c'est le théorème du rang.

Remarque 3. Pour trouver une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, nous avons remarqué qu'il s'agit de deux plans vectoriels (deux paramètres sont nécessaires et suffisants pour les décrire) de sorte qu'il suffit de construire une famille libre à deux éléments de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$. Pour ce faire, nous choisissons convenablement les paramètres qui interviennent dans l'expression des éléments de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, en particulier prendre $(0,1)$ et $(1,0)$ convient.

3. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = 3e_1 - e_3$ et $u_2 = e_2 - e_4$. On pose $F = f(E) = \{f(u), u \in E\}$.
a. Montrer que F est une droite de $\mathbb{R}^3$, et en donner un vecteur directeur v_0.
Réponse : Comme $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $F = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2))$, or d'après la question 1 :

$$f(u_1) = f(3,0,-1,0) = (0,3,1), f(u_2) = f(0,1,0,-1) = (0,-3,-1),$$

en particulier, $f(u_1) = -f(u_2)$ et $F = \mathrm{Vect}(f(u_1))$. Finalement, F est une droite vectorielle de vecteur directeur $v_0 = f(u_1) = (0,3,1)$.
b. Déterminer une base de $D = E \cap \mathrm{Ker}(f)$ et montrer que la droite D' de vecteur directeur u_1 est supplémentaire de D dans E.
Réponse : La famille $\{u_1, u_2\}$ est par définition une famille génératrice de E, mais elle est aussi immédiatement libre, car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de E. Or, d'après la question 2, $\{u_3 = (-5,-6,0,1), u_4 = (-2,1,1,0)\}$ est une base de $\ker(f)$. Ainsi, $u \in \mathbf{R}^4$ appartient à D si, et seulement si, il existe $x, y, a, b \in \mathbf{R}$ tels que :

$$u = xu_1 + yu_2 = au_3 + bu_4,$$

en échelonnant le système correspondant, cela est équivalent à $b = 5a$ et nous avons :

$$D = \{(u_3 + 5u_4)a | a \in \mathbf{R}\}.$$

Finalement, en prenant $a = 1$, $\{(-15,-1,5,1)\}$ est une base de D.

Comme la famille $\{u_1, (-15,-1,5,1)\}$ est évidemment libre, nous avons $D \cap D' = \{0\}$ de sorte que la somme $D + D'$ est directe. De plus, il vient :

$$\dim(D + D') = \dim(D) + \dim(D') - \dim(D \cap D') = 2,$$

donc comme $D + D' \subset E$ et que $\dim(E) = \dim(D + D')$, nous en déduisons que $D + D' = E$. Finalement, nous avons $D \oplus D' = E$ et D' est un supplémentaire de D dans E.

Exercice 5.3.— Utilisation de la matrice d'une application linéaire.
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z,t) = (3x + 4y + 2z + t\,,\, x + 2y - z - t\,,\, -x - y + 3z + 2t\,,\, 2x - y + t).$$

Soit A la matrice de f dans la base canonique.
1. Déterminer A.

Réponse : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$, alors les colonnes de A sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des $f(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de sorte que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que l'image par f de la famille $((1, 0, 1, -1), (0, -1, 1, -2))$ est liée. En déduire que f n'est pas injective. L'application f est-elle surjective ?
Réponse : Nous avons $f(1, 0, 1, -1) = (4, 1, 0, 1)$ et $f(0, -1, 1, -2) = (-4, -1, 0, -1)$, donc $f(1, 0, 1, -1) = -f(0, -1, 1, -2)$ et la famille $\{f(1, 0, 1, -1), f(0, -1, 1, -2)\}$ est liée. Or, $\{(1, 0, 1, -1), (0, -1, 1, -2)\}$ est libre, donc f ne peut pas être injective, car l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Comme l'espace de départ de f et son espace d'arrivée ont même dimension, f est surjective si, et seulement si, elle est injective. Donc, f n'est pas surjective.

3. Le deuxième vecteur-colonne est-il combinaison linéaire des troisième et quatrième vecteurs-colonnes ? En déduire $\mathrm{rg}(f)$. Le premier vecteur-colonne est-il combinaison linéaire des trois suivants ?
Réponse : Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, notons C_i la i-ème colonne de A, nous commençons par rappeler que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

Nous cherchons $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $C_2 = aC_3 + bC_4$. En analysant les deux dernières coordonnées de cette égalité de vecteurs, nous devons avoir $b = -1$ et $a = 1/3$, mais $C_2 \neq \frac{1}{3}C_3 - C_4$, car $4 \neq 2/3 - 1$. Finalement, C_2 n'est pas combinaison linéaire de C_3 et C_4.

Il est immédiat que $\{C_3, C_4\}$ est libre, donc $\{C_2, C_3, C_4\}$ est libre, car C_2 n'est pas combinaison linéaire de C_3 et C_4. Ainsi, comme $\mathrm{Vect}(C_2, C_3, C_4) \subset \mathrm{im}(f)$, nous en déduisons que $\dim(\mathrm{im}(f)) \geqslant 3$. Or, d'après la question 2, $\mathrm{im}(f) \neq \mathbf{R}^4$ de sorte que $\dim(\mathrm{im}(f)) \leqslant 3$. Donc, $\mathrm{im}(f)$ est de dimension 3 et d'après le théorème du rang, il vient :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim(\mathrm{im}(f)) = 1.$$

Or, d'après la question 2 et par linéarité de f, $(1, 1, 0, 1) \in \ker(f)$, donc $\ker(f) = \mathbf{R}(1, 1, 0, 1)$, car $\mathbf{R}(1, 1, 0, 1) \subset \ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbf{R}(1, 1, 0, 1))$.

Comme $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3$ et que $\{C_2, C_3, C_4\}$ est libre, alors $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ est liée et C_1 est combinaison linéaire de C_2, C_3, C_4.

Exercice 5.4.— Matrices qui commutent avec une matrice donnée.
Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées 2×2, et soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veut étudier l'ensemble E des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *commutant avec* A, c'est-à-dire telles que $MA = AM$. Pour cela on introduit l'application $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - MA$.

1. Montrer que g est linéaire. Donner sa matrice dans la base vue en cours de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse : Si M_1 et M_2 sont deux matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et x un réel, on a : $g(xM_1+M_2) = A(xM_1+M_2)-(xM_1+M_2)A = xAM_1+xM_1A-AM_2-M_2A = x(AM_1-M_1A)+(AM_2-M_2A) = xg(M_1)+g(M_2)$, c'est à dire que g est linéaire.
Calculons la matrice de g dans la base
$\left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On vérifie que
$g(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} - 3E_{1,2}$
$g(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 3E_{1,1} - 3E_{2,2}$
$g(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,2}$
$g(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 3E_{1,2} - E_{2,1}$.
D'où la matrice dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(g)$.

Réponse : On a évidemment

$$M \in \mathrm{Ker}\, g \iff g(M) = 0 \iff MA = AM \iff M \in E.$$

3. Montrer que les deux matrices I_2, A sont dans E. En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(g) \geq 2$.

Réponse : On remarque que $g(I_2) = A - A = 0$ et $g(A) = A^2 - A^2 = 0$ c'est à dire que I_2 et A sont dans $\mathrm{Ker}\, g$ c'est à dire dans E. Puisque ces deux matrices ne sont pas colinéaires $\mathrm{Ker}\, g$ contient $\mathrm{Vect}(A, I_2)$ qui est de dimension 2 donc $\dim(\mathrm{Ker}\, g) \geq 2$.

4. Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(g)$ et en déduire les valeurs de $\dim \mathrm{Ker}(g)$ et de $\mathrm{rg}(g)$.

Réponse : On remarque que la matrice de g écrite à la question 2 est de rang 2 (la colonne 1 est l'opposéée de la colonne 4, la colonne 2 vaut -3 fois la colonne 3, et les colonnes 1 et 3 ne sont pas proportionnelles). L'image de g est donc de dimension 2, et d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4.$$

C'est à dire que $\dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2$, ce qui implique que (A, I_2) est une base de E.

5. Prouver que A^2 est dans $\mathrm{Ker}(g)$ et en déduire que c'est une combinaison linéaire de I_2 et de A. Donner une base de $\Im(g)$.
Réponse : On remarque que $g(A^2) = A^3 - A^3 = 0$. C'est à dire que A^2 est dans $\mathrm{Ker}\, g$ ce qui implique, d'après la question précédente, que A^2 est combinaison linéaire de I_2 et de A.
La matrice de g dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ permet d'écrire que $\mathrm{im}(g)$ admet pour base les matrices $E_{2,1} - 3E_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $-E_{1,1} + E_{2,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.5.— * Application linéaire dans l'espace des matrices
Soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $f(M) = A\,M$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\Im(f)$.
Réponse : Posons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $M \in \mathrm{Ker}\, f$ si est seulement si a, b, c, d sont solution du système :

$$\begin{cases} a + 2b &= 0 \\ 2a + 4b &= 0 \\ c + 2d &= 0 \\ 2c + 4d &= 0 \end{cases}$$

c'est à dire que $a = -2b, c = -2d$. On peut donc écrire

$$M \in \mathrm{Ker}\, f \iff M = \begin{pmatrix} -2b & -2d \\ b & d \end{pmatrix} \iff = b \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de f est donc engendré par les matrices $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices n'étant pas proportionnelles elles sont libres et forment donc une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
Si $N = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $f(M) = \begin{pmatrix} x + 2y & z + 2t \\ 2x + 4y & 2z + 4t \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (z + 2t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{im}\, f$. Elles forment une parties libres (car non proportionnelles). Elles constituent donc une base de $\mathrm{im}\, f$.

Exercice 5.6.— * Multiples d'une matrice
Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées 3×3, et soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On veut étudier l'ensemble E des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *multiples de A (à droite)*, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M = AQ$. Pour cela on introduit l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(Q) = AQ$.

1. Montrer que f est linéaire.

Réponse : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $Q, R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda Q + \mu R) &= A(\lambda Q + \mu R) \\ &= \lambda AQ + \mu AR \\ &= \lambda f(Q) + \mu f(R) \end{aligned}$$

Donc f est bien une application linéaire.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Réponse : D'après le résultat de la première question, f est une application linéaire. Donc, d'après la Proposition 4.2.16 page 67, son Image est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par définition de E on a : $E = \mathrm{Im} f$ donc : E est un sous-espace vectoriel.

3. Montrer que $Q \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si les trois colonnes de Q sont dans le noyau de $f_A : X \mapsto AX$.

Réponse : Soit Q une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de Q. la matrice AQ est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ses trois colonnes sont : $f_A(C_1), f_A(C_2)$ et $f_A(C_3)$.
Donc, si $Q \in \operatorname{Ker} f$ on a $AQ = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, d'où : $f_A(C_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, f_A(C_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f_A(C_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

4. Donner une base de $\operatorname{Ker}(f_A)$. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Réponse : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a $X \in Kerf$ si et seulement si $AX = 0$ i.e. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 0 \\ 2x + 4y + 2z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

En échelonnant le système on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de ce sytème est le sous-espace vectoriel : $S = \operatorname{Vect}\{(1, -1, 1)\}$.
Comme $\operatorname{Ker} f = S$, on a donc $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f_A} = ((1, -1, 1))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
Déduire une base de $\operatorname{Ker} f$: D'après la question 3, $Q \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si les trois colonnes de Q sont dans le noyau de f_A. Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de Q. On a alors : $Q \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si C_1, C_2 et $C_3 \in \operatorname{Vect}(1, -1, 1)$. On en déduit que :

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} ; (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Notons $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a (R_1, R_2, R_3) est famille libre et génératice de $\operatorname{Ker} f$ donc il s'agit d'une base de $\operatorname{Ker} f$.

5. Que vaut $\operatorname{rg}(A)$? Que vaut $\operatorname{rg}(f)$?

Réponse : On rappelle (Définition 4.3.13 page 74) que le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{C_1, C_2, C_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, où C_1, C_2 et C_3 sont les vecteurs colonnes de A.

Afin de décetminer la dimension $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ on peut compter les inconnues principales du système correspondant à l'equation : $xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$ dont la matrice associé est A. En échelonnant ce système (dans la répose à la question 4), on trouve que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Déterminer $\operatorname{rg}(f)$: On rapelle que $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$. On appliquant le théorème du rang (Proposition 4.2.21), comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une espace vectoriel de dimension finie et f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a :

$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

D'après la réponse à la question 4, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 3$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 9 - 3 = 6$.

6. Montrer que M est dans $\Im(f)$ si et seulement si chacun des trois vecteurs colonnes de M est dans $\Im(A)$. Montrer que M est multiple de A si et seulement si $\Im(M) \subset \Im(A)$.

Réponse : On a : $M \in \Im(f)$ si et seulement si : $\exists Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M = AQ$. Notons U_1, U_2 et U_3 les trois vecteurs colonnes de M, et V_1, V_2 et V_3 les trois vecteurs colonnes de Q, on a :

$$M = AQ \Leftrightarrow U_1 = AV_1, U_2 = AV_2 \text{ et } U_3 = AV_3$$

Ce qui est équivalent à : $U_1 \in \Im(A)$, $U_2 \in \Im(A)$ et $U_3 \in \Im(A)$.

Soit M un multiple de A (i.e. $\exists Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : M = AQ$). Notons (U_1, U_2, U_3) les tois colonnes de M et (V_1, V_2, V_3) les trois colonnes de Q. Par définition : $\Im(A) = \operatorname{Vect}(V_1, V_2, V_3)$, on a :

$$\begin{aligned} \exists Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : M = AQ &\Leftrightarrow \exists V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^3 : U_1 = AV_1, U_2 = AV_2 \text{ et } U_3 = AV_3 \\ &\Leftrightarrow U_1 \in \Im(A), U_2 \in \Im(A), U_3 \in \Im(A) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Vect}(U_1, U_2, U_3) \subset \operatorname{Vect}(V_1, V_2, V_3) \\ &\Leftrightarrow \Im(M) \subset \Im(A) \end{aligned}$$

Exercice 5.7.— Caractérisations d'une bijection linéaire.

1. En déterminant leur noyau, démontrer que les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ci-dessous sont bijectives, en déterminer leur matrice dans la base canonique, et calculer leur inverse :

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par} \\ f(x, y) = (2x - 5y, 7x) & f(x, y, z) = (4x + y + 4z, 3x + y + 4z, x + y + 3z) \end{array}.$$

Réponse : On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par}$$
$$f(x,y) = (2x - 5y, 7x)$$

On a $(x,y) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si (x,y) est solution du système :

$$\begin{cases} 2x - 5y &= 0 \\ 7x &= 0 \end{cases}$$

On voit que le système admet comme unique solution $(0,0)$ donc $\operatorname{Ker} f = 0$ et f est injective. D'après le Corollaire 4.2.22 page 70 : f est bijective, en calculant les images des vecteurs canoniques $(1,0)$ et $(0,1)$ sont respectivement : $(2,7)$ et $(-5,0)$ donc la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'inverse de f on peut fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et trouver $(s,t)\mathbb{R}^2$ tels que : $f(s,t) = (x,y)$. Ceci revient à resoudre le système linéaire associé à cette équation. D'une manière équivalente on peut déterminer de la matrice de f^{-1} dans la base canonique. La proposition 4.3.16 de la page 75 stipule que la matrice de f^{-1} dans la base canonique est A^{-1}. On a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{35} \end{pmatrix}.$$

D'où : $f^{-1}(x,y) = (\frac{1}{7}y, -\frac{1}{5}x + \frac{2}{35}y)$.

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par}$$
$$f(x,y,z) = (4x + y + 4z, 3x + y + 4z, x + y + 3z)$$

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si (x,y,z) est solution du système :

$$\begin{cases} 4x + y + 4z &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \end{cases}$$

En échelonnant le système on obtient :

$$\begin{cases} 4x + y + 4z &= 0 \\ \frac{1}{4}y + z &= 0 \\ -z &= 0 \end{cases}$$

On voit que le système admet comme unique solution $(0,0)$ donc $\operatorname{Ker} f = 0$ et f est injective. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En inversant A on obtient qie la matrice de f^{-1} dans la base canonique est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $f^{-1}(x, y, z) = (x - y, 5x - 8y + 4z, -2x + 3y - z)$

2. En déterminant leur rang, montrer que les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ci-dessous sont bijectives, en déterminer leur matrice dans la base canonique, et calculer leur inverse :

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par} \\ f(x, y) = (5x + 3y, 3x + 2y) & f(x, y, z) = (x + 3y + z, x + y + z, 2x + 4y - z) \end{array}.$$

Réponse :

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par} \\ f(x, y) = (5x + 3y, 3x + 2y) \end{array}$$

Un vecteur $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ est dans l'image de f si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(x, y) = (x', y')$, autrement dit si et seulement si le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 3y & = & x' \\ 3x + 2y & = & y' \end{array} \right.$$

admet au moins une solution. Par la méthode du pivot, c'est équivalent à l'existence de solutions pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 5x + 3y & = & x' \\ \frac{1}{5}y & = & y' - \frac{3}{5}x' \end{array} \right.$$

Ce sytème est compatible, donc pout tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a l'existence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (x', y')$. D'où f est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, comme f est une application linéaire on déduit (Corollaire 4.2.22) que f est bijective. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f^{-1} dans la base canonique est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

et $f^{-1}(x, y) = (2x - 3y, -3x + 5y)$.

Soit f l'application donnée par :

$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par} \\ f(x,y,z) = (x+3y+z, x+y+z, 2x+4y-z) \end{array}.$$

Un vecteur $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ est dans l'image de f si et seulement s'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(x,y,z) = (x',y',z')$, autrement dit si et seulement si le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+3y+z & = & x' \\ x+y+z & = & y' \\ 2x+4y-z & = & z' \end{array} \right.$$

admet au moins une solution. Par la méthode du pivot, c'est équivalent à l'éxistence de solutions pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+3y+z & = & x' \\ -2y & = & y'-x' \\ -3z & = & -x'-y'+z' \end{array} \right.$$

Ce système est compatible, donc f est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, comme f est une application linéaire, on déduit que f est bijective. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f^{-1} dans la base canonique est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc $f^{-1}(x,y,z) = (-\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z)$.

3. Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-z);\ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y);$$

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-z, 3x+y-z);$$

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y-z, x-y+2z, 2x+y+z).$$

Réponse :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-z)$$

Commençons par déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$. $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y+x+z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné et contient 2 variables principale et une variable secondaire. Donc le sous-espace vectoriel des solutions de ce système est de dimension 1. Donc $\text{Dim Ker} f = 1$, d'où f n'est pas injective donc f n'est pas bijective.
En appliquant le théorème du rang on a : $\dim \text{Ker} f + \text{rg} f = 3$, d'où $\text{rg}(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\Im f = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y);$$

Commençons par déterminer $\dim \text{Ker} f$. $\text{Ker} f$ est l'ensemble des solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

En échelonnant ce système on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ -2y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système admet comme unique solution $(0, 0)$. Donc $\text{Ker} f = 0$, d'où f est injective.
En appliquant le théorème du rang on a : $\text{rg}(f) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$, d'où : $\Im f \neq \mathbb{R}^3$ et f n'est pas surjective donc n'est pas bijective.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y + z, x - z, 3x + y - z);$$

Commençons par déterminer $\dim \text{Ker} f$. $\text{Ker} f$ est l'ensemble des solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ 3x + y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

En échelonnant ce système on obtien :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ -y - 2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné et contient 2 variables principale et une variable secondaire. Donc le sous-espace vectoriel des solutions de ce système est de dimension 1. Donc $\text{Dim Ker} f = 1$, d'où f n'est pas injective donc f n'est pas bijective.
En appliquant le théorème du rang on a : $\text{rg}(f) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$, d'où : $\Im f \neq \mathbb{R}^3$ et f n'est pas surjective.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z, 2x + y + z).$$

Commençons par déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$. $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solution du système :

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$$

En échelonnant ce système on obtient :

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ -2y+3z &= 0 \\ \frac{3}{2}z &= 0 \end{cases}$$

Ce système admet comme unique solution $(0,0,0)$. Donc $\operatorname{Ker} f = 0$, d'où f est injective, comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ on en déduit que f est surjective et bijective.

Exercice 5.8.— Symétrie par rapport à une droite du plan. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les deux droites D et Δ d'équations respectives $x-2y=0$ et $2x-y=0$.

1. Vérifier que $D \oplus \Delta = \mathbb{R}^2$. On note s la symétrie par rapport à D paralèllement à Δ.

Réponse : Soit $(x,y) \in D \cap \Delta$, alors :

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases},$$

en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, il vient $x=0$, puis avec L_2, il vient $y=0$, donc $(x,y)=(0,0)$. Réciproquement, $(0,0) \in D \cap \Delta$ et $D \cap \Delta = \{0\}$. En particulier, il vient :

$$\dim(D+\Delta) = \dim(D) + \dim(\Delta) - \dim(D \cap \Delta) = 2,$$

donc comme $D + \Delta \subset \mathbf{R}^2$ et $\dim(D+\Delta) = \dim(\mathbf{R}^2)$, il vient $D + \Delta = \mathbf{R}^2$. Finalement, comme $D \cap \Delta = \{0\}$, nous avons $D \oplus \Delta = \mathbf{R}^2$.

2. Que dire de $s(s(u))$? En déduire que pour tout vecteur $u' \in \mathbb{R}^2$ l'équation $s(u) = u'$ admet une et une seule solution. Que dire de $\operatorname{Ker}(s)$? de $\operatorname{Im}(s)$?

Réponse : Soit $u \in \mathbf{R}^2$, d'après la question 1, il existe un unique couple $(d,\delta) \in D \times \Delta$ tel que $u = d + \delta$ et $s(u) = d - \delta$. Or, comme Δ est un espace vectoriel, $(d, -\delta) \in D \times \Delta$ et $s(s(u)) = d - (-\delta) = s + \delta = u$. Finalement, $s^2 = \mathrm{id}^2_{\mathbf{R}}$ et s est bijective et $s^{-1} = s$.

Soit $u' \in \mathbf{R}^2$, comme s est bijective, il existe un unique $u \in \mathbf{R}^2$ tel que $s(u) = u'$, il s'agit de $s(u')$.

Comme s est bijective, $\ker(s) = \{0\}$ et $\operatorname{im}(s) = \mathbf{R}^2$.

3. Calculer l'image par s des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique, et en déduire la matrice de s dans cette base. Pour $u = (x,y)$ expliciter alors $s(u)$ en fonction des composantes x, y.

Réponse : Commençons par remarquer que $\{u_1 = (2,1)\}$ est une base de D et que $\{u_2 = (1,2)\}$ est une base de Δ, alors avec la question 1, $B = \{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Afin de calculer $s(e_1)$ et $s(e_2)$, décomposons e_1 et e_2 dans B, nous avons :

$$e_1 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2, e_2 = -\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2.$$

Finalement, nous avons :

$$s(e_1) = \frac{2}{3}u_1 - \left(-\frac{1}{3}u_2\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), s(e_2) = -\frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

et la matrice de s dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est donnée par $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y \\ \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y \end{pmatrix},$$

donc $s(x, y) = \left(\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y, \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y\right)$.

Exercice 5.9.— **Projection sur une droite de l'espace.** Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite engendrée par le vecteur $v_0 = (1, 2, -1)$. Soit d'autre part $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x - y + z = 0$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. On note p la projection sur D paralèllement à P.

Réponse : Comme $v_0 \notin P$, car $1 - 2 - 1 = -2 \neq 0$, il vient $P \cap D = \{0\}$. En particulier, nous avons :

$$\dim(P + D) = \dim(P) + \dim(D) - \dim(P \cap D) = 3,$$

donc comme $P + D \subset \mathbf{R}^3$ et $\dim(P + D) = \dim(\mathbf{R}^3)$, il vient $P + D = \mathbf{R}^3$. Finalement, comme $P \cap D = \{0\}$, nous avons $P \oplus D = \mathbf{R}^3$.

2. Déterminer $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$, et en donner des bases.

Réponse : Soit $u \in \mathbf{R}^3$, d'après la question 1, il existe un unique couple $(v, w) \in P \times D$ tel que $u = v + w$ et $p(u) = w$.

- Montrons que $\mathrm{im}(p) = D$ en procédant par double inclusion. Déjà, $\mathrm{im}(p) \subset D$. Réciproquement, si $w \in D$, alors $p(w) = w$, donc $w \in \mathrm{im}(p)$.
- Montrons que $\ker(p) = P$ en procédant par double inclusion. Soit $u = v + w \in \ker(p)$ avec $v \in P$ et $w \in D$, alors $p(u) = w = 0$, donc $u = v \in P$. Réciproquement, si $u \in P$, alors $u = u + 0$ avec $(u, 0) \in P \times D$, donc $p(u) = 0$ et $u \in \ker(p)$.

Finalement, $\mathrm{im}(p) = D$ et $\ker(p) = P$.

Une base de $\mathrm{im}(p)$ est donnée par $\{v_0\}$, car c'est une famille génératrice (par définition) et libre (car $v_0 \neq 0$) de D. Une base de $\ker(p)$ est donnée par $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$, car c'est une famille libre de cardinal $\dim(P)$ de P.

3. Soit M la matrice de p dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminer $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$ et en déduire M.

Réponse : D'après la question 2, $\{v_0\}$ est une base de D et $\{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0)\}$ est une base de P, donc d'après la question 1, $B = \{v_0, v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Afin de calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$ décomposons e_1, e_2 et e_3 dans B, nous avons :

$$e_1 = -\frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2, e_2 = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3, e_3 = -\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3.$$

Finalement, nous avons :

$$p(e_1) = -\frac{1}{2}v_0 = \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), p(e_2) = \frac{1}{2}v_0 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), p(e_3) = \frac{1}{2}v_0 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

et la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est donnée par $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b. Pour $u = (x, y, z)$ expliciter $p(u)$ en fonction des composantes x, y, z.
Réponse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ -x + y + z \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \end{pmatrix},$$

donc $p(u) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -x + y + z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)$.

Exercice 5.10.— Projection dans l'espace des polynômes. A toute fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on associe la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}[P(t) + P(-t)]$. On note $\pi(P)$ cette fonction.

1. Montrer que si P est dans l'espace $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$ alors il en va de même pour $\pi(P)$. *Ainsi $P \mapsto \pi(P)$ définit une application de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dans lui même.*

Réponse : Nous rappelons que si P et Q sont deux polynômes, alors $P + Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\max(\deg(P), \deg(Q))$. Dès lors, si $P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$, comme $P(-t)$ est de même degré que P, nous en déduisons que $\pi(P)$ est degré au plus n et $\pi(P) \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$. Finalement, π est une application de $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même.

2. Montrer que $\pi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.

Réponse : Premièrement, $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel, soient maintenant $P, Q \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ et $\mu \in \mathbf{R}$, montrons que $\pi(P + \mu Q) = \pi(P) + \mu\pi(Q)$, ce qui concluera :

$$\begin{aligned} \pi(P + \mu Q) &= \frac{1}{2}((P + \mu Q)(t) + (P + \mu Q)(-t)), \\ &= \frac{1}{2}(P(t) + \mu Q(t) + P(-t) + \mu Q(-t)), \\ &= \frac{1}{2}(P(t) + P(-t)) + \mu\frac{1}{2}(Q(t) + Q(-t)), \\ &= \pi(P) + \mu\pi(Q). \end{aligned}$$

Finalement, π est une application linéaire.

3. Déterminer le noyau de π, ainsi que son image. Quelle est la matrice de π dans la base $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$?

Réponse : Nous procédons par double inclusion :

- Soit $P \in \ker(\pi)$, alors $P(t) = -P(t)$, c'est-à-dire que P est un polynôme impair.

- Réciproquemnt, si $P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ est impair, alors $\pi(P) = 0$.

Finalement, $\ker(\pi)$ est constitué des polynômes impairs de degré au plus n.

Nous procédons par double inclusion :

- Soit $P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$, alors $\pi(P)$ est pair, car $\pi(P)(-t) = \frac{1}{2}(P(-t) + P(t)) = \pi(P)$.
- Réciproquement, si P est pair, alors $\pi(P) = \frac{1}{2}(P(t)+P(-t)) = \frac{1}{2}(P(t)+P(t)) = P(t)$, donc $P \in \mathrm{im}(P)$.

Finalement, $\mathrm{im}(P)$ est constitué des polynômes pairs de degré au plus n.

Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, nous avons :

$$\pi(X^k) = \frac{1}{2}(X^k + (-1)^k X^k) = \begin{cases} X^k, \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Finalement, la k-ième colonne de la matrice de π dans la base $(1, \ldots, X^n)$ est nulle si k est impair et est constituée d'un 1 en k-ième position et de 0 partout ailleurs, sinon.

Exemple. Si $n = 3$, la matrice de π dans $(1, X, X^2, X^3)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Vérifier que π est une projection. Déduire de ce qui précède que tout polynôme P de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.
Réponse : Soit $P \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$, montrons que $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$, pour ce faire, nous calculons :

$$\begin{aligned} \pi(\pi(P)) &= \frac{1}{2}(\pi(P)(t) + \pi(P)(-t)), \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(P(t) + P(-t)) + \frac{1}{2}(P(-t) + P(t))\right), \\ &= \frac{1}{2}(P(t) + P(-t)), \\ &= \pi(P) \end{aligned}$$

Finalement, $\pi \circ \pi = \pi$ et π est une projection.

Remarque 4. Nous aurions également pu utiliser la question 3 pour remarquer que $\pi(P)$ est pair et donc que $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$.

Comme π est une projection, nous en déduisons que :

$$\mathcal{P}_n(\mathbf{R}) = \ker(\pi) \oplus \mathrm{im}(P).$$

Or, d'après la question précédente :

- $\ker(\pi)$ est l'ensemble des polynômes impairs de degré au plus n,
- $\mathrm{im}(P)$ est l'ensemble des polynômes pairs de degré au plus n.

Finalement, tout polynôme de $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ est la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair et cette décomposition est unique.

Exercice 5.11.— * Un théorème de Bézout. On considère les fonctions polynomiales $P(t) = t^3 - 1$ et $Q(t) = t^4 + t^2 + 1$. On veut étudier l'ensemble des diviseurs communs de P et Q, autrement dit l'ensemble $\mathcal{D}$ des polynômes $D(t)$ tels qu'il existe deux polynômes $A(t)$ et $B(t)$ vérifiant $A(t)D(t) = P(t)$ et $B(t)D(t) = Q(t)$. On note $(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^9$ et on introduit une application $f : \mathbb{R}^9 \to \mathcal{P}_7$ (l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 7), définie par

$$f(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = (a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4) \times P(t) + (\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3) \times Q(t)$$

1. Montrer que f est linéaire. Montrer que si un polynôme $R(t)$ est dans $\mathrm{im}\, f$ alors il est divisible par chaque polynôme $D(t)$ de $\mathcal{D}$.

Réponse : Soit $(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta), (a', b', c', d', e', \alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \mathbb{R}^9$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule,

$$\begin{aligned}
f(\lambda(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta) + (a', b', c', d', e', \alpha', \beta', \gamma', \delta')) = \\
((\lambda a + a') + (\lambda b + b')t + (\lambda c + c')t^2 + (\lambda d + d')t^3 + (\lambda e + e')t^4) \times P(t) \\
+((\lambda\alpha + \alpha') + (\lambda\beta + \beta')t + (\lambda\gamma + \gamma')t^2 + (\lambda\delta + \delta')t^3) \times Q(t) \\
= \lambda(a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4) \times P(t) + (a' + b't + c't^2 + d't^3 + e't^4) \times P(t) \\
+\lambda(\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3) \times Q(t) + (\alpha' + \beta' t + \gamma' t^2 + \delta' t^3) \times Q(t) \\
= \lambda f(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta) + f(a', b', c', d', e', \alpha', \beta', \gamma', \delta')
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Soit $D(t) \in \mathcal{D}$, alors par définition on a $A(t), B(t)$ deux polynomes tels que $A(t)D(t) = P(t), B(t)D(t) = Q(t)$. Soit $R(t)$ un polynome dans $\mathrm{im}\, f$, alors $R(t) = f(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et en notant $S(t) = (a+bt+ct^2+dt^3+et^4), T(t) = \alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3$, on a

$$R(t) = S(t)P(t) + T(t)Q(t) = S(t)A(t)D(t) + T(t)B(t)D(t) = (S(t)A(t) + T(t)B(t))D(t),$$

donc $D(t)$ divise $R(t)$.

2. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

Réponse : On choisit la base canonique de $\mathbb{R}^9$ au départ et celle de $\mathcal{P}_7$ à l'arrivée qui est $(1, t, t^2, \dots, t^7)$. On obtient la matrice

$$M = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

3. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que si $D(t) \in \mathcal{D}$ et si $A(t)D(t) = P(t)$ et $B(t)D(t) = Q(t)$ avec $A(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ et $B(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$, alors $f(a, b, c, d, e, -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = 0$.
Réponse : Soit $(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in ker f$, par liberté de la famille $(1, t, \ldots, t^7)$ (ou ce qui revient au même par identification des coefficients de $f(a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$), on a les équations, auxquelles on applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a-\alpha & = & 0 \\ b-\beta & = & 0 \\ c-\alpha-\gamma & = & 0 \\ a-d+\beta+\delta & = & 0 \\ b-e+\alpha+\gamma & = & 0 \\ c+\beta+\delta & = & 0 \\ d+\gamma & = & 0 \\ e+\delta & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a-\alpha & = & 0 \\ b-\beta & = & 0 \\ c-\alpha-\gamma & = & 0 \\ -d+\alpha+\beta+\delta & = & 0 \\ -e+\alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta & = & 0 \\ d+\gamma & = & 0 \\ e+\delta & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a-\alpha & = & 0 \\ b-\beta & = & 0 \\ c-\alpha-\gamma & = & 0 \\ d+\gamma & = & 0 \\ e+\delta & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -\gamma+\delta & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc 3 inconnues secondaires (α, β et δ ci-dessus) donc $\ker f$ est de dimension 3.
4. a. Donner le rang de f.
Réponse : D'après le théorème du rang, on a

$$9 = \dim \mathbb{R}^9 = \dim Ker f + \dim \operatorname{im} f,$$

donc, par définition, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = 9 - 3 = 6$.
b. Montrer que si $R_1(t)$ et $R_2(t)$ sont dans $\operatorname{im} f$, non nuls, et de degré minimum, alors $R_1(t)$ et $R_2(t)$ sont proportionnels. Donner un polynôme non nul de degré minimum dans $\operatorname{im} f$.
Réponse : Notons d le degré (commun à R_1 et R_2 donc), et λt^d le terme dominant de $R_1(t)$ et μt^d celui de $R_2(t)$: donc $\lambda, \mu \neq 0$. Alors $\mu R_1(t) - \lambda R_2(t)$ est de terme de degré d $\mu\lambda t^d - \lambda\mu t^d = 0$, donc son degré est inférieur ou égal à $d-1$. Comme $\operatorname{im} f$ est un espace vectoriel, $\mu R_1(t) - \lambda R_2(t) \in \operatorname{im} f$, mais son degré étant strictement inférieur au degré minimal (d), il est nul, donc $\mu R_1(t) = \lambda R_2(t)$, i.e.

$$R_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} R_2(t),$$

i.e. ces polynômes sont proportionnels.
c. Montrer que $R(t)$ est dans $\operatorname{im} f$ si et seulement si $R(t)$ est un polynôme de degré ≤ 7 divisible par le polynôme $D_0(t) = 1 + t + t^2$.
Réponse : Commençons par quelques rappels sur les nombres complexes. On note $j = e^{i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En utilisant la forme trigonométrique, $j^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Toujours avec la forme trigonométrique on trouve $j^3 = (j^2)^3 = 1$. Donc j et j^2 sont racines (complexes) de $x^3 - 1 = P(t)$ (la 3e racine etant évidemment 1), et aussi de $1 + t + t^2$

(en utilisant la forme algébrique, ou en cherchant les racines de ce polynome de degré 2). Autrement dit on peut factoriser

$$1 + t + t^2 = (t - j)(t - j^2).$$

De même, on peut calculer

$$Q(j) = \underbrace{j^4}_{j^3=1} + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0,$$

et

$$Q(j^2) = \underbrace{j^8}_{j^6=1} + j^4 + 1 = j^2 + j + 1 = 0.$$

Donc j et j^2 sont deux racines (distinctes) de P et de Q, donc

$$D_0(t) = (t - j)(t - j^2)|P(t), \quad D_0(t) = (t - j)(t - j^2)|Q(t).$$

Donc d'après la question 3) si $R(t)$ est dans $\operatorname{im} f$, c'est un multiple de $D_0(t)$ (et est de degré ≤ 7 puisque $\operatorname{im} f \subset \mathcal{P}_7$). Réciproquement on calcule (ou essayons de construire un élément de $\operatorname{im} f$ de degré minimal)

$$Q(t) - tP(t) = 1 + t^2 + t = D_0(t).$$

Donc $D_0(t)$ est dans $\operatorname{im} f$. Si $R(t)$ est un multiple de $D_0(t)$ (de degré inférieur ou égal à 7) $R(t) = A(t)D_0(t)$, alors comme le degré de D_0 est 2, le degré de A est inférieur ou égal à 5. On réutilise le calcul précédent :

$$R(t) = A(t)(Q(t) - tP(t) = -tA(t)P(t) + A(t)Q(t).$$

On voit que les coefficients de degré 4 et 5 de A se simplifie dans l'expression précédente (par exemple $a_5t^5 \times (-t) \times (t^3) + a_5t^5 \times (t^4) = 0$) , autrement dit si $A(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0$, alors en notant $B(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0$, on a donc

$$R(t) = -tB(t)P(t) + B(t)Q(t) = f(0, -a_0, -a_1, -a_2, -a_3, a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Donc $R(t) \in \operatorname{im} f$.

5. Montrer que $D_0(t)$ est le plus grand diviseur commun de $P(t)$ et $Q(t)$. Soit A_0, B_0 le quotient de P, Q par D_0 : calculer explicitement $A_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t$ et $B_0(t) = a_0 + b_0t + c_0t^2$.

Réponse : On a déjà vu que $D_0(t)$ était effectivement un diviseur commun. Supposons qu'il en existe un autre D de degré plus grand (donc ≥ 3), alors il divise P, qui est de degré 3, donc D est de degré 3 et $D = \lambda(t^3 - 1)$ puisqu'il divise P et qu'il est de même degré (avec λ non nul). Or 1 est donc racine de D, donc comme D divise Q, 1 est racine de $Q = 1 + t^2 + t^4$: absurde. Donc D_0 est un diviseur commun de degré maximal.

Puisqu'on connait ses trois racines, $P(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t-j)(t-j^2)$, donc $A_0(t) = t - 1$. Cherchons $B(t)$ sous la forme donnée, on trouve

$$Q(t) = (t^2 + t + 1)(a_0 + b_0t + c_0t^2) = a_0 + (b_0 + a_0)t + (a_0 + b_0 + c_0)t^2 + (b_0 + c_0)t^2 + c_0t^4,$$

comme la famille $1, t, t^2, t^3, t^4$ est libre, on en déduit $a_0 = 1, c_0 = 1, b_0 = -1$, i.e. $B_0(t) = 1 - t + t^2$.

6. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes $U_0(t), V_0(t)$, avec U_0 de degré $< 2 = \deg Q - \deg D_0$ et U_0 de degré $< 1 = \deg P - \deg D_0$, tel que $D_0(t) = U_0(t)P(t) + V_0(t)Q(t)$.

Réponse : En fait on a déjà trouvé $U_0 = -t$ et $V_0 = 1$ dans la question 4.c. Supposons qu'il existe un second couple $U_1 = at + b, V_1 = \alpha$, alors $U_0P + V_0Q - U_1P - V_1Q = 0$, i.e.

$$f(-b, -1 - a, 0, 0, 0, 1 - c, 0, 0, 0) = 0$$

Or on vérifie avec les équations précédentes (ou la matrice M), que cela implique $b = a - 1 = 1 - c = 0$, i.e. $U_0 = U_1, V_0 = V_1$.

Exercice 5.12.— * Interpolation de Lagrange. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 3. Soient d'autre part a, b, c, d quatre réels **distincts**. On considère l'application $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(P) = (P(a), P(b), P(c), P(d))$.

1. Vérifier que f est linéaire.

Réponse : Tout d'abord, $\mathcal{P}_3$ est un espace vectoriel. Soient $P, Q \in \mathcal{P}_3$ et $\mu \in \mathbf{R}$, alors :

$$\begin{aligned} f(P + \mu Q) &= ((P + \mu Q)(a)(P + \mu Q)(b), (P + \mu Q)(c), (P + \mu Q)(d)), \\ &(P(a) + \mu Q(a)P(b) + \mu Q(b), P(c) + \mu Q(c), P(d) + \mu Q(d)), \\ &= (P(a), P(b), P(c), P(d)) + \mu(Q(a), Q(b), Q(c), Q(d)), \\ &= f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Finalement, f est une application linéaire.

2. A quelle condition un polynôme $P \in \mathcal{P}_3$ est-il dans $\mathrm{Ker}(f)$? En déduire que f est bijective (on pourra utiliser le lien entre racines et factorisation). Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(t)$ de degré ≤ 3 tel que $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ lorsque $x = 0, 1, 2, 3$ (on ne demande pas de déterminer $Q(t)$!).

Réponse : Un polynôme P est dans le noyau de f si, et seulement si, a, b, c et d sont des racines de P. Or, un polynôme réel non nul de degré au plus 3 admet au plus 3 racines distinctes, donc comme a, b, c et d sont distincts, $\ker(f) = \{0\}$ et f est injective.

Remarquons que $\dim(\mathcal{P}^3) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, car $\{1, x, x^2, x^3\}$ est une base de $\mathcal{P}_3$, ainsi comme f est injective, nous en déduisons que f est aussi bijective.

Comme 0, 1, 2, 3 sont distincts, nous pouvons prendre $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = 3$ dans ce qui précède, alors comme f est bijective, il existe un unique $Q \in \mathcal{P}_3$ tel que :

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = f(Q) = (Q(0), Q(1), Q(2), Q(3)),$$

ce qui conclut.

3. Puisque f est bijective, soient L_1, L_2, L_3, L_4 les polynômes de $\mathcal{P}_3$ dont les images par f sont e_1, e_2, e_3, e_4 (la base canonique).

a. Sans calculer les L_i montrer que (L_1, L_2, L_3, L_4) est une base de $\mathcal{P}_3$. Comment obtenir les coordonnées de $P \in \mathcal{P}_3$?
Réponse : Remarquons que $\#(L_1, L_2, L_3, L_4) = 4 = \dim(\mathcal{P}_3)$, il suffit donc de montrer que (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 \lambda_4 = 0$, alors en appliquant f aux deux membres de cette égalité et en utilisant sa linéarité (question 1), il vient :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0.$$

Or, (e_1, e_2, e_3, e_4) étant libre, il vient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre.

Soit $Q \in \mathcal{P}_3$, (L_1, L_2, L_3, L_4) étant une base $\mathcal{P}_3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbf{R}$ tels que :

$$Q = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4,$$

en appliquant f aux deux membres de cette égalité et en utilisant sa linéarité (question 1), ainsi que la définition de L_1, L_2, L_3 et L_4, il vient :

$$(P(a), P(b), P(c), P(d)) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$

donc les coordonnées de Q dans (L_1, L_2, L_3, L_4) sont $(P(a), P(b), P(c), P(d))$.
b. Calculer $f((x-a)(x-b)(x-c))$ et en déduire L_4. Déterminer de même explicitement L_1, L_2, L_3. Déterminer explicitement le polynôme $Q(t)$ de la question 2.
Réponse : Nous avons $f((x-a)(x-b)(x-c)) = (0, 0, 0, (d-a)(d-b)(d-c))$, donc par linéarité de f (question 1), il vient :

$$f\left(\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}\right) = (0, 0, 0, 1) = e_4,$$

donc, il vient $L_4 = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ et de manière analogue, nous démontrons que :

$$L_1 = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}, L_2 = \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}, L_3 = \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(d-b)(c-d)}.$$

Cas particulier. Pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$ et $Q \in \mathcal{P}_3$ tel que $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pour $x = 0, 1, 2, 3$, d'après la question 3.a et les expressions de L_1, L_2, L_3 et L_4 que nous venons de calculer, il vient :

$$Q = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} + \frac{x(x-2)(x-3)}{4} - \frac{x(x-1)(x-3)}{10} + \frac{x(x-1)(x-2)}{60},$$

donc $Q = \frac{1}{10}(x^2 - 6x + 10)$.

Remarque 5. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbf{R}$ distincts et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous définissons le polynôme réel de degré au plus n suivant :

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - a_j}{a_i - a_j},$$

alors, en reprenant cet exercice, nous avons montré que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$, à savoir l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n, et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ dans cette base sont $(P(a_1), \ldots, P(a_{n+1}))$.

Exercice 5.13.— **Différentes bases de $\mathbb{R}^2$.**
Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), u = (4,3), v = (5,4), w = (6,5)$ et on pose :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{B}' = (u, v), \mathcal{B}'' = (v, w)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage P' de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
Réponse : Montrons que $\mathcal{B}'$ est libre,

$$\lambda u + \mu v = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4\lambda + 5\mu & = 0 \\ 3\lambda + 4\mu & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4\lambda + 5\mu & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array} \right.$$

donc la famille est libre, comme elle possède 2 vecteurs (dans $\mathbb{R}^2$) c'est une base. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est simple :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P' de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est l'inverse de P, on a donc

$$P' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner alors la matrice de passage P'' de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse.
Réponse : Resolvons $\lambda v + \mu w = 0$,

$$\lambda v + \mu w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 5\lambda + 6\mu & = 0 \\ 4\lambda + 5\mu & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 5\lambda + 6\mu & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array} \right.$$

donc la famille est libre, comme elle possède 2 vecteurs c'est une base. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ est

$$P'' = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Son inverse (qui est la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}$) est alors

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Soit $u2 = (3,2) \in \mathbb{R}^2$. Déterminez les coordonnées (x, y), (x', y') et (x'', y'') de $u2$ dans les trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

Réponse : Pour $\mathcal{B}$ c'est facile : $(x,y)=(3,2)$. Pour (x',y') on résoud le système

$$\left\{\begin{array}{ll} 4x'+5y' & =3 \\ 3x'+4y' & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 4x'+5y' & =3 \\ y' & =-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' & =2 \\ y' & =-1 \end{array}\right.$$

et pour (x'',y''),

$$\left\{\begin{array}{ll} 5x''+6y'' & =3 \\ 4x''+5y'' & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5x+6y & =3 \\ y'' & =-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =3 \\ y & =-2 \end{array}\right.$$

On peut aussi utiliser la formule de changement de coordonnées du cours : on note $X_{\mathcal{B}}$ les coordonnées d'un vecteur X dans une base $\mathcal{B}$. On a alors, pour $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}.$$

Ici par exemple on aura

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (P'')^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On peut calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ en écrivant les vecteurs de $\mathcal{B}''$ dans la base $\mathcal{B}'$: pour v c'est facile et w c'est le même genre de calcul que precedemment. On peut aussi utiliser que cette matrice est la matrice

$$P^{-1} \times P'' = P' \times P'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.14.— Matrices de passage dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1,2,3), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (-1,1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer l'inverse de P.
Réponse : Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la matrice P dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 est inversible. Cette vérification aura lieu un peu plus bas dans cette réponse, à l'occasion du calcul de l'inverse de P.
La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est celle mentionnée ci-dessus. Elle est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse de P (et vérifier au passage que P est inversible, comme annoncé plus haut), il suffit d'appliquer la méthode du pivot à la matrice ci-dessous, obtenue en juxtaposant P et la matrice identité I. Les opérations pour passer d'une étape à la suivante sont décrites à droite de chaque matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -1 \times L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2 \times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3 \times L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4 \times L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow -1 \times L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Comme nous obtenons la matrice identité I à gauche, cela signifie que P est inversible, et donc que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ comme annoncé au début de cette réponse. La partie de droite est la matrice P^{-1} recherchée, qui est donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $u = 2u_1 - 3u_2 + 5u_3$. Quelles sont les coordonnées x', y', z' de u dans $\mathcal{B}'$? Quelles sont les composantes x, y, z de u ? Quel calcul matriciel permet aussi de déterminer x, y, z ?
Réponse : Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont les coefficients apparaissant dans l'unique manière d'écrire u comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3. Comme $u = 2u_1 - 3u_2 + 5u_3$, on obtient $(x', y', z') = (2, -3, 5)$. Pour obtenir les composantes x, y, z de u, il faut écrire u dans la base canonique, et donc remplacer u_1, u_2 et u_3 par leurs coordonnées dans la base canonique dans la combinaison linéaire ci-dessus. On obtient

$$u = (x, y, z) = 2.(-1, 2, 3) - 3.(1, -1, 1) + 5.(-1, 1, -2) = (-10, 12, -7).$$

Ces coordonnées peuvent aussi être calculée de manière matricielle au moyen de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times X' = P \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit bien des mêmes valeurs que celles obtenues plus haut par une autre méthode.

3. Soit $v = (1, 2, 3)$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les coordonnées x', y', z' de v dans $\mathcal{B}'$? Donner x', y', z'.

Réponse : Les coordonnées x', y', z' de v dans $\mathcal{B}'$ peuvent être calculées à partir de ses coordonnées x, y, z dans la base canonique $\mathcal{B}$ au moyen de l'inverse P^{-1} de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \times X = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

4. On pose $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur x', y', z' le vecteur $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$ appartient-il à E ? Donner une équation cartésienne de E (dans les coordonnées x, y, z).

Réponse : Le vecteur $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$ appartient à E si et seulement si $z' = 0$. En effet, si $z' = 0$ alors $x'u_1 + y'u_2$ est une combinaison linéaire de u_1 et u_2, donc il appartient à $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ par définition. Réciproquement, si $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$ est une combinaison linéaire de u_1 et u_2, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3 = \lambda u_1 + \mu u_2$, et donc $(x' - \lambda)u_1 + (y' - \mu)u_2 + z'u_3 = 0$. Comme (u_1, u_2, u_3) est une base, les vecteurs qui la constituent forment une famille libre, et les coefficients $(x' - \lambda), (y' - \mu)$ et z' apparaissant dans la combinaison linéaire précédente sont nuls ; en particulier, $z' = 0$.

La condition $z' = 0$ est une équation cartésienne de E dans les coordonnées x', y', z'. Pour obtenir une équation cartésienne dans les coordonnées x, y, z, il faut exprimer la coordonnée z' en fonction de celles-ci. Mais on sait que

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \times X = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $z' = 5x + 4y - z$. L'équation cartésienne recherchée est donc $5x + 4y - z = 0$.

Exercice 5.15.— Changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^4$ soient $u_1 = (1, 0, 1, 1), u_2 = (2, 1, 0, 1), u_3 = (1, 1, -1, 1)$ et soit $E = \mathrm{Vect} u_1, u_2, u_3$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre et compléter cette famille en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Réponse : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et considérons la combinaison linéaire nulle $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 = 0$. Pour montrer que la seule solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de ce système linéaire homogène est $(0, 0, 0)$, et donc que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 forment une famille libre, il faut appliquer la méthode du pivot à la matrice de ce système et montrer qu'elle est de rang 3. Comme les colonnes de cette matrice contiennent respectivement les coordonnées de u_1, u_2 et u_3, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2 \times L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc bien 3 pivots, de sorte que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 forment une famille libre.

Il existe différentes méthodes pour compléter cette famille en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$, car tout choix de vecteur u_4 qui n'appartient pas au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ fera l'affaire. Néanmoins, pour procéder de manière systématique, on peut rajouter à u_1, u_2 et u_3 les vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ afin de former une famille génératrice. Il s'agit ensuite d'en extraire une base qui contient les 3 premiers vecteurs u_1, u_2 et u_3. A cette fin, on applique la méthode du pivot à la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées de $u_1, u_2, u_3, e_1, e_2, e_3$ et e_4, puis on conserve les 4 vecteurs correspondant aux colonnes des 4 pivots que nous allons obtenir. Comme les 3 premières colonnes de cette matrice sont les mêmes que celles de la matrice considérée ci-dessus, les premières étapes du calcul utilisent les mêmes manipulations sur les lignes que ci-dessus, mais avec des colonnes supplémentaires. On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2 \times L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La quatrième ligne contient un pivot situé en quatrième colonne, ce qui correspond au vecteur e_1. Notons que nous pourrions aussi choisir le vecteur e_2 ou le vecteur e_3, mais pas le vecteur e_4 puisque le coefficient correspondant dans la dernière ligne est nul (on peut d'ailleurs remarquer que $e_4 = u_1 - u_2 + u_3$). En particulier, nous faisons ici le choix (pour la suite de notre réponse) de compléter (u_1, u_2, u_3) en une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, e_1)$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et rappeler le lien entre les colonnes X, X' des coordonnées d'un vecteur u dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Réponse : La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, u_3 et e_1 constituant $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. On obtient donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, la quatrième colonne de cette matrice dépendra du choix du quatrième vecteur utilisé au point 1 pour compléter (u_1, u_2, u_3) en la base $\mathcal{B}'$.

3. Calculer P^{-1}.

Réponse : Pour calculer l'inverse de P, il suffit d'appliquer la méthode du pivot à la matrice ci-dessous, obtenue en juxtaposant P et la matrice identité I. Remarquons que les 4 premières colonnes de cette matrice sont identiques à celles de la matrice considérée dans le deuxième calcul du point 1, de sorte que les manipulations sur les lignes de cette matrice seront les mêmes que dans ce calcul. On obtient ainsi :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2 \times L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A ce stade du calcul, il faut encore poursuivre afin de rendre le dernier pivot égal à 1 et nettoyer toutes les coefficients situés au-dessus des pivots.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2 \times L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Une fois que l'on obtient la matrice identité I dans la moitié de gauche de la matrice, la matrice P^{-1} recherchée est obtenue en prenant juste la moitié de droite :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, pour différents choix de la quatrième colonne de P au point 2, on obtiendra des matrices P^{-1} différentes.

4. A quelle condition sur les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$ a t-on $u \in E$? En déduire un système d'équations cartésiennes de E (aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4).
Réponse : Si les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$ sont x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, cela signifie que $u = x'_1.u_1 + x'_2.u_2 + x'_3.u_3 + x'_4.e_1$. Bien entendu, dans cette dernière équation, on peut remplacer le vecteur e_1 par un autre vecteur choisi au point 1 pour compléter (u_1, u_2, u_3) en la base $\mathcal{B}'$. Nous verrons que le système d'équations cartésiennes pour E aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 ne dépendra essentiellement pas de ce choix, puisque ni E ni ces coordonnées n'en dépendent. Nous aurons $u \in E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ si et seulement si $x'_4 = 0$. L'argument est tout-à-fait similaire à celui du point 4 de l'exercice 5.14 : si $x'_4 = 0$ alors $x'_1.u_1 + x'_2.u_2 + x'_3.u_3$ est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3, donc il appartient à $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ par définition. Réciproquement, si $x'_1.u_1 + x'_2.u_2 + x'_3.u_3 + x'_4.e_1$ est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x'_1.u_1 + x'_2.u_2 + x'_3.u_3 + x'_4.e_1 = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3$, et donc $(x'_1 - \lambda_1).u_1 + (x'_2 - \lambda_2).u_2 + (x'_3 - \lambda_3).u_3 + x'_4.e_1 = 0$. Comme $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, e_1)$ est une base, les vecteurs qui la constituent forment une famille libre, et les coefficients $(x'_1 - \lambda_1), (x'_2 - \lambda_2), (x'_3 - \lambda_3)$ et x'_4 apparaissant dans la combinaison linéaire précédente sont nuls ; en particulier, $x'_4 = 0$.
La condition $x'_4 = 0$ est un système d'équations cartésiennes de E, qui n'est constitué que d'une seule équation, dans les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, x'_4. Il n'est pas surprenant qu'il n'y ait qu'une seule équation, car $\dim E = 3 = \dim \mathbb{R}^4 - 1$. Pour obtenir une équation cartésienne dans les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, il faut exprimer la coordonnée x'_4 en fonction de celles-ci. Mais on sait que

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = P^{-1} \times X = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $x'_4 = x_1 - 2x_2 - x_3$. L'équation cartésienne recherchée est donc

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$$

Le calcul de cette équation fait intervenir la matrice P^{-1}, qui dépend du choix fait au point 1, mais seule la dernière ligne de P^{-1} est vraiment utilisée ici. Or celle-ci était déjà obtenue (à un multiple non nul près) au milieu du calcul de P^{-1}, après les étapes qui ne dépendent pas du choix fait au point 1. Par conséquent, comme nous l'avions annoncé, l'équation cartésienne obtenue n'en dépend pas non plus, à un multiple non nul près.

Exercice 5.16.— *** Matrices de passage dans l'espace des polynômes.**
Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 3.
1. On fixe un réel a. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (t \mapsto 1, t \mapsto t-a, t \mapsto (t-a)^2, t \mapsto (t-a)^3)$ est une base de $\mathcal{P}_3$ (noter que $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathcal{P}_3$).
Réponse : Appelons u_1 la fonction polynomiale $t \mapsto 1$, u_2 la fonction polynomiale $t \mapsto t-a$, u_3 la fonction polynomiale $t \mapsto (t-a)^2$ et u_4 la fonction polynomiale $t \mapsto (t-a)^3$, de

sorte que $\mathcal{B}_a = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Lorsque $a = 0$, nous appellerons les vecteurs correspondants e_1, e_2, e_3 et e_4 ; ils forment la base canonique de $\mathcal{P}_3$.
La famille $\mathcal{B}_a$ de 4 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ de dimension 4 sera une base si et seulement si c'est une famille libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$. Considérons la combinaison linéaire nulle $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = 0$. Nous devons montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Cette combinaison linéaire n'est autre que la fonction polynomiale $t \mapsto \lambda_1 + \lambda_2(t-a) + \lambda_3(t-a)^2 + \lambda_4(t-a)^3$. Cette fonction polynomiale est égale à la fonction (polynomiale) nulle si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2(t-a) + \lambda_3(t-a)^2 + \lambda_4(t-a)^3 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En décalant t par le réel a fixé, cela revient à demander que $\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2 + \lambda_4 t^3 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, la combinaison linéaire $\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \lambda_3.e_3 + \lambda_4.e_4$ est la fonction polynomiale nulle. Mais comme $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base, ceci implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ comme souhaité.
2. Quelle est la matrice de passage P_a de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_a$? Calculer l'inverse de P_a.
Réponse : La matrice de passage P_a de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ à la base $\mathcal{B}_a = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 constituant $\mathcal{B}_a$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$. Or on a :

$$\begin{aligned}
u_1 &= (t \mapsto 1) = e_1 \\
u_2 &= (t \mapsto t-a) = e_2 - a.e_1 \\
u_3 &= (t \mapsto (t-a)^2 = t^2 - 2a.t + a^2) = e_3 - 2a.e_2 + a^2.e_1 \\
u_4 &= (t \mapsto (t-a)^3 = t^3 - 3a.t^2 + 3a^2.t - a^3) = e_4 - 3a.e_3 + 3a^2.e_2 - a^3.e_1
\end{aligned}$$

En prenant bien garde à remettre les vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 dans l'ordre dans les combinaisons linéaires ci-dessus, on obtient donc la matrice P_a suivante :

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer P_a^{-1}, il suffit d'appliquer la méthode du pivot à la matrice ci-dessous, obtenue en juxtaposant P et la matrice identité I. Heureusement pour nous, la matrice P_a est déjà sous forme échelonnée et avec tous ses pivots égaux à 1. Il suffit donc de nettoyer tous les coefficients au-dessus de la diagonale. On obtient ainsi :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & a^2 & -a^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + a^3 \times L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3a^2 \times L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3a \times L_4 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 0 & 0 & 1 & 0 & -3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - a^2 \times L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2a \times L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + a \times L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une fois que l'on obtient la matrice identité I dans la moitié de gauche de la matrice, la matrice P_a^{-1} recherchée est obtenue en prenant juste la moitié de droite :

$$P_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que $P_a^{-1} = P_{-a}$, ce qui n'est pas surprenant puisque l'opération inverse de décaler t de $-a$ est de décaler t de $+a$.

3. Application numérique : déterminer les réels a, b, c, d tels que $P(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ s'écrive sous la forme $P(t) = a + b(t+1) + c(t+1)^2 + d(t+1)^3$. Retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégral.

Réponse : Le polynome $P(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ n'est autre que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, et on cherche à l'écrire sous la forme $a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 + d.u_4$ où u_1, u_2, u_3, u_4 sont les vecteurs constituant la base $\mathcal{B}_{-1}$ de $\mathcal{P}_3$. En d'autres termes, connaissant les coordonnées $(1, 1, 1, 1)$ du vecteur P dans la base $\mathcal{B}_0$, on recherche ses coordonnées (a, b, c, d) dans la base $\mathcal{B}_{-1}$. Ceci peut être fait au moyen de la matrice P_{-1}^{-1}, car on sait que

$$X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = P_{-1}^{-1} \times X = P_{-1}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve $a = 0$, $b = 2$, $c = -2$ et $d = 1$.

D'autre part, la formule de Taylor avec reste intégral (cfr section 9.1.2 du poly de Math101) à l'ordre 4 devient la formule de Taylor pour les polynômes

$$P(t) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(t-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

En prenant $a = -1$ dans cette formule, on trouve les coefficients recherchés par identification :

$$\begin{aligned} a &= P(-1), \\ b &= P'(-1), \\ c &= \frac{1}{2}P''(-1), \\ d &= \frac{1}{6}P'''(-1). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $P(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, on calcule aisément ses dérivées :

$$\begin{aligned} P'(t) &= 1 + 2t + 3t^2, \\ P''(t) &= 2 + 6t, \\ P'''(t) &= 6. \end{aligned}$$

En remplaçant dans les équations ci-dessus, on en déduit que $a = 0$, $b = 2$, $c = -2$ et $d = 1$. Ce sont bien les mêmes valeurs que celles trouvées précédemment, les cours Math101 et Math103 ne sont donc pas contradictoires !

Exercice 5.17.— **Différentes matrices d'une même application linéaire.**
On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z)$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
Réponse : Soient λ un réel et (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On calcule

$$\begin{aligned} &f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &\qquad = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &\qquad = (\lambda x + x' + \lambda y + y' - (\lambda z + z'), \lambda x + x' - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z')) \\ &\qquad = \lambda(x + y - z, x - y + 2z) + (x' + y' - z', x' - y' + 2z') \\ &\qquad = \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.
2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques $\mathcal{B}^3, \mathcal{B}^2$.
Réponse : Comme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, la matrice en question a deux lignes et trois colonnes. Chaque ligne correspond à une coordonnée de $\mathbb{R}^2$, et ses coefficients sont ceux devant les variables x, y et z dans l'expression de f. Il s'agit donc de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De manière équivalente, on peut raisonner sur les colonnes : chaque colonne correspond aux coordonnées (exprimées dans la base d'arrivée $\mathcal{B}^2$) de l'image d'un vecteur de la base de départ $\mathcal{B}^3$. On trouve la même matrice.

3. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Réponse : On commence par échelonner et réduire notre matrice à l'aide du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice équivalente obtenue a deux pivots, et est donc de rang 2. Ainsi $\mathrm{rg}(f) = 2$. Grace à notre matrice échelonnée réduite, on obtient une écriture paramétrique du noyau :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y, z) \mid x + \frac{z}{2} = 0, y - \frac{3}{2}z = 0\right\} = \left\{\left(-\frac{z}{2}, \frac{3}{2}z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est donc une droite vectorielle de vecteur directeur $(-1, 3, 2)$ (trouvé en prenant $z = 2$). La famille composée du seul vecteur $(-1, 3, 2)$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Montrer qu'il existe des vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u_1) = (0, 0)$, $f(u_2) = (1, 0)$ et $f(u_3) = (0, 1)$ (avec $u_1 \neq 0$). Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}^2)$.

Pour $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, montrer qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{Vect} u_2, u_3$ tel que $f(u) = v$. En déduire toutes les solutions de $f(u) = (1, 1)$.

Réponse : Le vecteur u_1 doit être un vecteur non-nul du noyau de f. On prend par exemple $u_1 = (-1, 3, 2)$, le vecteur trouvé à la question précédente. On a montré que le rang de f valait 2. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est surjective. On pose donc u_2 un antécédent quelconque de $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, et u_3 un antécédent de $(0, 1)$. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, nous allons montrer qu'elle est libre. Soient donc λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. En appliquant f, on trouve

$$0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(u_3) = (\lambda_2, \lambda_3).$$

En particulier, les réels λ_2 et λ_3 sont nuls. Comme u_1 est non-nul, on en déduit que λ_1 est nul. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre. Comme elle comporte autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$, elle est aussi génératrice : c'est une base.

Les colonnes de $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}^2)$ sont les coordonnées des vecteurs $f(u_i)$ (pour $i = 1, 2, 3$) exprimées dans la base canonique $\mathcal{B}^2$. On a donc par construction

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit enfin $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $(a, b) = f(au_2 + bu_3)$. Ainsi $u = au_2 + bu_3$ convient. Supposons avoir $u' \in \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ convenant aussi. Il existe a' et b' deux réels tels que u' s'écrive $u' = a'u_2 + b'u_3$. On a alors $f(u') = (a', b') = (a, b)$. Ainsi $a' = a$ et $b' = b$, donc

$u' = u$. On a montré que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique u dans $\mathrm{Vect}(u_2, u_3)$ tel que $f(u) = v$.
Soit maintenant $u \in \mathbb{R}^3$ solution de l'équation $f(u) = (1, 1)$. Comme la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe α_1, α_2 et α_3 réels tels que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. On a alors $f(u) = f(\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)$. Comme $\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$, on a d'après ce qui précède $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$. Ainsi, toute solution de l'équation $f(u) = (1, 1)$ s'écrit sous la forme $\alpha_1 u_1 + u_2 + u_3$. Réciproquement, le vecteur $u = \alpha_1 u_1 + u_2 + u_3$ est solution de $f(u) = (1, 1)$ quel que soit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = (1, 1)\} = \{\alpha_1 u_1 + u_2 + u_3, \alpha_1 \in \mathbb{R}\}.$$

5. Vérifier que $\mathcal{B}'' = ((1, -1), (2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}'')$.
Réponse : La famille $\mathcal{B}''$ est libre (elle est composée de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires). Comme elle comporte autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant $\mathbb{R}^2$, c'en est une base. Pour calculer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}'')$, on cherche les coordonnées de $f(e_i)$ (pour $i = 1, 2, 3$) dans la base $\mathcal{B}''$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 1) = \frac{1}{5}(1, -1) + \frac{2}{5}(2, 3) \\ f(e_2) &= (1, -1) \\ f(e_2) &= (-1, 2) = -\frac{3}{5}(1, -1) + \frac{1}{5}(2, 3). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.18.— On se donne d'une part la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et d'autre part les familles $\mathcal{B} = \big((1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((1, 2, 3), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\big)$. Enfin on note $\mathcal{B}^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Vérifier que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
Réponse : Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base, on considère la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées de chaque vecteur dans $\mathcal{B}$. En appliquant la méthode du pivot à cette matrice, on va vérifier qu'elle est de rang 3. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow -1 \times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient bien 3 pivots, donc cette matrice est de rang 3 et $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc une base.
On fait de même pour la famille $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2 \times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3 \times L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De nouveau, on obtient bien 3 pivots, donc cette matrice est de rang 3 et $\mathcal{B}'$ est également une base.

Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires telles que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}') = A.$$

2. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}^3$.
Réponse : Puisque $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B})$, en regardant la première colonne de A, on voit que le vecteur $f(1, 0, 0)$ a pour coordonnées $(1, -1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, $f(1, 0, 0) = 1.(1, 1, 1) - 1.(2, 1, 0) + 2.(0, 1, 1) = (-1, 2, 3)$. Ensuite, en regardant la deuxième colonne de A, le vecteur $f(0, 1, 0)$ a pour coordonnées $(2, 0, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Donc $f(0, 1, 0) = 2.(1, 1, 1) - 1.(0, 1, 1) = (2, 1, 1)$. Enfin, en regardant la troisième colonne de A, le vecteur $f(0, 0, 1)$ a pour coordonnées $(4, -2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Donc $f(0, 0, 1) = 4.(1, 1, 1) - 2.(2, 1, 0) + 3.(0, 1, 1) = (0, 5, 7)$.
Par linéarité de f, on calcule $f(x, y, z) = x.f(1, 0, 0) + y.f(0, 1, 0) + z.f(0, 0, 1) = x.(-1, 2, 3) + y.(2, 1, 1) + z.(0, 5, 7) = (-x + 2y, 2x + y + 5z, 3x + y + 7z)$.
On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^3$: ses colonnes contiennent respectivement les coordonnées que nous avons calculées pour les vecteurs $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$.
On obtient la matrice

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

On procède de même pour l'application linéaire g. Puisque $A = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}')$, en regardant la première colonne de A, on voit que le vecteur $g(1,0,0)$ a pour coordonnées $(1,-1,2)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Par conséquent, $g(1,0,0) = 1.(1,2,3) - 1.(-1,0,1) + 2.(1,1,0) = (4,4,2)$. Ensuite, en regardant la deuxième colonne de A, le vecteur $g(0,1,0)$ a pour coordonnées $(2,0,-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Donc $g(0,1,0) = 2.(1,2,3) - 1.(1,1,0) = (1,3,6)$. Enfin, en regardant la troisième colonne de A, le vecteur $g(0,0,1)$ a pour coordonnées $(4,-2,3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Donc $g(0,0,1) = 4.(1,2,3) - 2.(-1,0,1) + 3.(1,1,0) = (9,11,10)$.
Par linéarité de g, on calcule $g(x,y,z) = x.g(1,0,0) + y.g(0,1,0) + z.g(0,0,1) = x.(4,4,2) + y.(1,3,6) + z.(9,11,10) = (4x+y+9z, 4x+3y+11z, 2x+6y+10z)$.
On en déduit la matrice de g dans la base $\mathcal{B}^3$: ses colonnes contiennent respectivement les coordonnées que nous avons calculées pour les vecteurs $g(1,0,0), g(0,1,0)$ et $g(0,0,1)$. On obtient la matrice

$$\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 11 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}\, A$. A t-on $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$? Comparer $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.
Réponse : On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}\, A$. En effet, si X est un vecteur-colonne tel que $A \times X = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors l'image par f de ce vecteur a pour coordonnées $(0,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}$, donc est égal à $0_{\mathbb{R}^3}$ également. Réciproquement, si un vecteur est dans le noyau de f et que l'on note X le vecteur-colonne correspondant dans la base canonique $\mathcal{B}^3$, alors $A \times X = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}\, A$. Le raisonnement est identique pour montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}\, A$.
Par contre, on n'a pas forcément $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$. Notons $\mathcal{B} = (u_1, u_, u_3)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. Alors $\mathrm{Im}(f) = Vect(u_1 - u_2 + 2.u_3, 2.u_1 - u_3, 4.u_1 - 2.u_2 + 3.u_3)$ tandis que $\mathrm{Im}(g) = Vect(v_1 - v_2 + 2.v_3, 2.v_1 - v_3, 4.v_1 - 2.v_2 + 3.v_3)$. Si la matrice A était de rang 3, ces images seraient toutes deux égales à $\mathbb{R}^3$, mais en fait le rang de A est égal à 2 car sa troisième colonne est la somme de ses deux premières colonnes. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = Vect(u_1 - u_2 + 2.u_3, 2.u_1 - u_3) \neq \mathrm{Im}(g) = Vect(v_1 - v_2 + 2.v_3, 2.v_1 - v_3)$.
Enfin, le rang de f et le rang de g sont égaux, car si on note $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui envoie la base (u_1, u_2, u_3) sur la base (v_1, v_2, v_3) alors h est un isomorphisme et $g = h \circ f$. Par conséquent, h envoie l'image de f sur l'image de g, et ces sous-espaces vectoriels sont donc de mêmes dimensions.

4. $(*)$ Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
a. Déterminer P.
Réponse : La matrice P est la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Cependant, nous ne connaissons a priori que les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}^3$. Il faut donc commencer par calculer leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, ce qui peut être fait au moyen de la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Cette matrice Q est la matrice dont les colonnes contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}^3$. Elle est donc donnée

par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ s'obtiennent alors par le produit de la matrice Q^{-1} avec les vecteurs-colonnes des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}^3$. Mis ensemble, ces vecteurs-colonnes forment la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^3$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B}^3,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qu'il suffit de multiplier à gauche par Q^{-1} afin d'obtenir la matrice P. Commençons par calculer Q^{-1} en juxtaposant la matrice Q avec la matrice identité I puis en appliquant la méthode du pivot à cette matrice augmentée. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -1 \times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2 \times L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A ce stade, il reste à multiplier la dernière ligne par -1, puis à nettoyer tous les coefficients situés au-dessus des 3 pivots.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \times L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow -1 \times L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2 \times L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

La matrice Q^{-1} est donc celle figurant dans la moitié de droite de cette dernière matrice augmentée. On en déduit finalement la matrice P, en multipliant Q^{-1} par $P_{\mathcal{B}^3,\mathcal{B}'}$. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on note X_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}^3$, Y_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$, et enfin Y'_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.
Exprimer $Y_{f(u)}$, puis $Y'_{g(u)}$, en fonction de X_u et A. En déduire que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ on a $Y_{g(u)} = PY_{f(u)}$. Retrouver alors les résultats de la question 3) sur le noyau et le rang de f et g.
Réponse : On a $Y_{f(u)} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}) \times X_u = A \times X_u$. De manière similaire, on a $Y'_{g(u)} = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}') \times X_u = A \times X_u$.
D'autre part, $Y_{g(u)} = P \times Y'_{g(u)}$. Mais les relations ci-dessus montrent que $Y_{f(u)} = A \times X_u = Y'_{g(u)}$. Par conséquent, $Y_{g(u)} = P \times Y_{f(u)}$ comme souhaité.
Comme la matrice P est inversible, on en déduit que $g(u) = 0$ si et seulement si $Y_{g(u)} = 0$ si et seulement si $Y_{f(u)} = 0$ si et seulement si $f(u) = 0$. Par conséquent, le noyau de f et le noyau de g coïncident.
D'autre part, la relation $Y_{g(u)} = P \times Y_{f(u)}$ montre que l'isomorphisme de matrice P envoie l'image de f sur l'image de g, qui ont donc mêmes dimensions (remarquons que P n'est autre que la matrice de l'application linéaire h apparaissant dans la réponse au point 3). Le rang de f est donc égal au rang de g.

Exercice 5.19.— Applications linéaires bijectives et matrices inversibles.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + 3y - z, x + 2y + z)$.
1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
Réponse : La matrice de f dans la base canonique se trouve sans calcul :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f$. Montrer que f est bijective.
Réponse : On échelonne la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate donc que le rang de la matrice A est 3, et donc $\mathrm{rg}(f) = 3$. Cela nous dit aussi que le système homogène associé à A admet commme unique solution la solution nulle, donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Chacun de ces deux résultats implique que f est bijective.

3. Montrer que pour toute colonne Y l'équation $AX = Y$ admet une unique solution X. Montrer que A est inversible et calculer son inverse. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Réponse : Puisque f est bijective, sa matrice A est inversible. On en déduit que l'équation $AX = Y$ est équivalente à $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times Y$, ou encore $X = A^{-1}Y$: on a ainsi trouvé l'unique solution de l'équation. Explicitons A^{-1} en utilisant la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et l'unique solution de l'éqation $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -3, 1), u_3 = (2, 3, 3)$. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la canonique, puis la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f$.

Réponse : Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, on vérifie, en l'échelonnant, que la matrice dont les colonnes sont u_1, u_2, u_3 est de rang 3. En anticipation de la suite, on va aussi calculer son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -9 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

On a bien trouvé une matrice de rang 3, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$, donc son inverse $Q = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, que l'on vient de calculer, est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, avec bien sûr $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La formule de changement de base nous donne donc finalement :

$$A' = Q \times A \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -31 & -18 & -85 \\ -8 & -3 & -21 \\ 15 & 5 & 39 \end{pmatrix}$$

b. Pourquoi l'équation $A'X' = Y'$ admet-elle une unique solution X', quelle que soit la colonne Y' ? En déduire que A' est inversible.
Réponse : Posons $X = Q^{-1}X'$, ce qui équivaut à $X' = QX$. Alors l'équation $A'X' = Y'$ équivaut à $A' \times Q \times X = Y'$, ou encore, d'après la formule $A' = Q \times A \times Q^{-1}$, à $Q \times A \times X = Y'$, et finalement, en multipliant par Q^{-1}, à $AX = Q^{-1}Y'$. Or, en posant $Y = Q^{-1}Y'$, on a vu en question 3 que l'équation $AX = Y$ admet pour unique solution $X = A^{-1}Y$. L'unique solution de $AX = Q^{-1}Y'$ est donc $X = A^{-1} \times Q^{-1} \times Y'$, et donc l'unique solution de $A'X' = Y'$ est $X' = Q \times A^{-1} \times Q^{-1} \times Y'$. Cela signifie que A' est inversible, et que son inverse est $Q \times A^{-1} \times Q^{-1}$.
c. Déterminer l'inverse de A'.
Réponse : En utilisant les résultats précédents, on calcule :

$$A'^{-1} = Q \times A^{-1} \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 277 & 123 \\ -3 & 66 & 29 \\ 5 & -115 & -51 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.20.— **Formes particulières de la matrice dans des bases convenables : rang et noyau.**
1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x+y+z, 2x+y+3z, x+2z, 2x+2y+2z)$.
a. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$. Donner une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Im}(f)$. Donner deux vecteurs u_1, u_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$. Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}\, f$.
Réponse : Pour calculer le rang de f, il suffit de calculer le rang de la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice échelonnée avec 2 lignes non nulles, donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. Or le théorème du rang nous dit que $\mathrm{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$ (la dimension de l'espace vectoriel de départ), et donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2)) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ (c'est un choix arbitraire, on aurait pu dans cet exemple faire le choix de n'importe quel autre couple de vecteurs parmi $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$). Posons $u_1 = e_1, u_2 = f(e_2), v_1 = f(e_1) = (1, 2, 1, 2), v_2 = f(e_2) = (1, 1, 0, 2)$. Comme il s'agit de deux vecteurs non colinéaires, (v_1, v_2) est une famille libre. Ainsi, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, et ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension 2, donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Im}(f)$. Donc (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$, on reprend l'échelonnage de la matrice pour obtenir que $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ est équivalent à $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$. On en déduit que

$$\operatorname{Ker} f = \{(-2t, t, t); t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u)$$

pour $u = (-2, 1, 1)$; et (u) est une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. On pose $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u)$: montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Réponse : On regarde la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On constate qu'elle est échelonnée de rang 3, et donc $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Compléter (v_1, v_2) en une base de $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}(f)$.

Réponse : On utilise la méthode du cours en utilisant la base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire qu'on considère le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \mu_1 \epsilon_1 + \mu_2 \epsilon_2 + \mu_3 \epsilon_3 + \mu_4 \epsilon_4$, et on échelonne la matrice correspondante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice échelonnée, les pivots sont aux colonnes 1, 2, 3 et 4, donc correspondent aux inconnues principales $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, ou encore aux vecteurs $v_1, v_2, \epsilon_1, \epsilon_2$. Donc $(v_1, v_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Par construction, $f(u_1) = v_1$, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$, $f(u_2) = v_2$, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ et $f(u) = 0$ (puisque $u \in \operatorname{Ker} f$), dont les coordonnées dans n'importe quelle base sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$. On en déduit que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Si on note a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un vecteur v dans $\mathcal{B}_1$ et b_1, b_2, b_3, b_4 les coordonnées de $f(v)$ dans $\mathcal{B}_2$, quelles sont les relations exprimant les b_i en fonction des a_j ?
Réponse : Par définition des coordonnées, $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u$, et comme f est une application linéaire,

$$f(v) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + a_3f(u) = a_1v_1 + a_2v_2.$$

On peut ainsi lire les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_2$: $\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \end{cases}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner alors une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}\, f$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.
Réponse : Notons $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. On lit sur la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ que $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$ et $f(u_3) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Or (v_1, v_2) est une famille libre (car $\mathcal{B}_2$ est une famille libre), donc (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Pour déterminer $\mathrm{Ker}\, f$, on cherche les vecteurs u de $\mathbb{R}^3$, décomposés sous la forme $u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ dans la base $\mathcal{B}_1$, tels que $f(u) = 0$. Puisque f est une application linéaire, c'est équivalent à $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$, et comme $\mathcal{B}_2$ est une famille libre, à $a_1 = a_2 = 0$. Ainsi, $u = a_3u_3$, et donc (u_3) est une base de $\mathrm{Ker}\, f$. On a en particulier $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

Exercice 5.21.— On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (2, -3, -2), u_3 = (-2, 3, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer son inverse P^{-1}.
Réponse : Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs u_1, u_2, u_3. Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, il suffit de vérifier que la matrice P est de rang 3, ce qu'on fait en

l'échelonnant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est par construction la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

ci-dessus. On calcule son inverse par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -11 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

On pose $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

2. Quelle formule utilisant P, P^{-1} et A permet de calculer A' ? Déterminer A' puis calculer $A \times A$.

Réponse : La formule de changement de base du cours nous dit que

$$A' = P^{-1} \times A \times P.$$

On trouve par le calcul $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis on calcule $A \times A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.22.— Changement de bases Soit $B = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(u_1) = -u_1 + 2u_3,\ \ f(u_2) = -u_2 + 2u_3,\ \ f(u_3) = u_3.$$

1. Donner la matrice de f dans la base B. Si $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ désigne les coordonnées d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dans la base B, quelles sont les coordonnées de $f(v)$ dans B ?
Réponse : Les formules précédentes donnent les coordonnées dans la base B des images par f des vecteurs de B, ce qui donne :

$$M = \mathrm{Mat}_{B \leftarrow B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$, les coordonnées de $f(v)$ dans la base B sont données par $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, et le calcul donne : $f(v) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}_B$.

2. Soit $F_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = -v\}$. Montrer que F_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner ses équations cartésiennes, ainsi qu'une base que l'on notera V_{-1}.
Réponse : Pour montrer que F_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on doit montrer que poour tous u, v dans F_{-1}, et tous λ, μ dans $\mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in F_{-1}$, ce qui est une conséquence du fait que f est une application linéaire :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= \lambda f(u) + \mu f(v) \text{ car } f \text{ est une application linéaire} \\ &= \lambda u + \mu v \text{ car u et v sont dans } F_{-1} \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + \mu v \in F_{-1}$.
Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$, alors, par la question 1, $f(v) = -v$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} -x_1 & & & = & -x_1 \\ & -x_2 & & = & -x_2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & -x_3 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Et donc, après division par 2, on trouve l'équation cartésienne :

$$F_{-1} = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

On a obtenu une seule équation, avec x_1 comme inconnue principale et x_2, x_3 comme inconnues secondaires, et donc

$$F_{-1} = \{v = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}_B \in \mathbb{R}^3,\ s,t \in \mathbb{R}\}.$$

On en déduit la base de F_{-1} : $V_{-1} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right)$.

3. Soit $F_1 = \{v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = v\}$. Donner les équations cartésiennes de F_1, ainsi qu'une base que l'on notera V_1.

Réponse : Comme ci-dessus, pour $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$, $f(v) = v$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} -x_1 & & & = & x_1 \\ & -x_2 & & = & x_2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} -2x_1 & & = & 0 \\ & -2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $F_1 = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$.

On en déduit facilement que $V_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right)$ est une base de F_1.

4. Soit $V = V_{-1} \cup V_1$. Montrer que V est une base de $\mathbb{R}^3$.

Réponse : On écrit la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de V dans la base B :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que V est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la matrice P est de rang 3, et pour cela, on échelonne P, en faisant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L1 + L_2$, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est bien de rang 3.

5. Ecrire la matrice de passage P de la base B vers la base V et calculer P^{-1}.

Réponse : Par construction, la matrice de passage de B vers V est la matrice P ci-dessus.

On calcule son inverse par la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Ecrire la matrice de f dans la base V. Que vaut $f \circ f$? Que dire de f ?

Réponse : Dénotons les vecteurs de V : $V = (v_1, v_2, v_3)$. Comme v_1 et v_2 sont dans F_{-1}, ils vérifient $f(v_1) = -v_1$ et $f(v_2) = -v_2$. Comme v_3 est dans F_1, il vérifie $f(v_3) = v_3$. On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{V \leftarrow V}(f) = M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $f \circ f$, on peut calculer $M \times M = \mathrm{Mat}_{V \leftarrow V}(f \circ f)$: le calcul nous donne que $M \times M = I$, donc $f \circ f$ est l'identité, ce qui signifie que f est une symétrie. Plus précisément, on constate que, par construction, $F_{-1} = \mathrm{Ker}\,(f + I)$ (car $f(v) = -v$ équivaut à $(f + I)(v) = 0$), et de même $F_1 = \mathrm{Ker}\,(f - I)$. Donc f est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_{-1}.

Exercice 5.23.— examen 2015

Soit un paramètre $t \in \mathbb{R}$ et M_t la matrice suivante :

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5t & 1 - 3t & 2t \\ 5t & -3t & 1 + 2t \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de t la matrice M_t est-elle inversible ?

2. On note M_1 la matrice M_t lorsque $t = 1$ et f_1 l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont M_1 est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a. Donner une base de $\ker f_1$, que l'on notera B_0.
b. Donner une base de $\mathrm{im}\, f_1$, que l'on notera B_1.
c. Démontrer que la suite B, obtenue en juxtaposant B_0 et B_1, est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $\ker f_1 \bigoplus \mathrm{im}\, f_1 = \mathbb{R}^3$.
d. Ecrire la matrice de f_1 dans la base B.
e. Que vaut $f_1 \circ f_1$? Montrer que f_1 est une projection.
f. Calculer la matrice de passage, que l'on notera P, de la base canonique à la base B.
g. Quelle relation peut-on écrire entre M_1, P et la matrice de f_1 dans la base B ?

3. On note M_2 la matrice M_t lorsque $t = 2$ et f_2 l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont M_2 est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 5, 5),\ u_2 = (4, 6, -1),\ u_3 = (0, 1, 1)$$

.
a. Démontrer que $U = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Ecrire la matrice de f_2 dans la base U.
c. Démontrer que f_2 est une symétrie, et déterminer par rapport à quels espaces.

Exercice 5.24.— **examen de rattrapage 2015**
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_3, -x_1 - x_2 + 3x_3).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2. Calculer une base de $\Im f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$. L'application f est-elle bijective ?

3. Soit $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (3, 2, -5)$. Montrer que la suite $V = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Donner la matrice de passage de la base canonique vers la base V.

5. Calculer $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ et donner leurs coordonnées dans la base V.

6. Donner la matrice de f dans la base V.