Feuille d'exercices 5

Applications linéaires

Exercice 5.1.— Définition algébrique de la linéarité

1. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille 2. Pour $M \in E$ on pose

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\phi : E \to E$ est linéaire.

b. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est un point fixe de ϕ, c'est-à-dire $\phi(A) = A$.

2. Soit E l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré ≤ 2. Pour $P \in E$ on pose $\phi(P) = (P(1), P'(2))$.

a. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}^2$ est linéaire.

b. Calculer $\phi(P)$ pour $P(t) = t - 1$ et pour $P(t) = (t-2)^2$. Existe t-il un polynôme P de degré ≤ 2 tel que $P(1) = 1$ et $P'(2) = -1$?

3. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on pose $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^t \, dt$.

a. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}$ est linéaire.

b. Donner deux applications affines $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ distinctes qui sont dans le noyau de ϕ.

Exercice 5.2.— Application linéaire associée à une matrice.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ quelconque donner l'expression de $f(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

3. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = 3e_1 - e_3$ et $u_2 = e_2 - e_4$. On pose $F = f(E) = \{f(u), u \in E\}$.

a. Montrer que F est une droite de $\mathbb{R}^3$, et en donner un vecteur directeur v_0.

b. Déterminer une base de $D = E \cap \mathrm{Ker}(f)$ et montrer que la droite D' de vecteur directeur u_1 est supplémentaire de D dans E.

Exercice 5.3.— Utilisation de la matrice d'une application linéaire.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x + 4y + 2z + t\,,\ x + 2y - z - t\,,\ -x - y + 3z + 2t\,,\ 2x - y + t).$$

Soit A la matrice de f dans la base canonique.

1. Déterminer A.

2. Montrer que l'image par f de la famille $((1, 0, 1, -1), (0, -1, 1, -2))$ est liée. En déduire que f n'est pas injective. L'application f est-elle surjective ?

3. Le deuxième vecteur-colonne est-il combinaison linéaire des troisième et quatrième vecteurs-colonnes ? En déduire $\text{rang}(f)$. Le premier vecteur-colonne est-il combinaison linéaire des trois suivants ?

Exercice 5.4.— Matrices qui commutent avec une matrice donnée.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées 2×2, et soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veut étudier l'ensemble E des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *commutant avec* A, c'est-à-dire telles que $MA = AM$. Pour cela on introduit l'application $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - MA$.

1. Montrer que g est linéaire. Donner sa matrice dans la base vue en cours de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $E = \text{Ker}(g)$.

3. Montrer que les deux matrices I_2, A sont dans E. En déduire que $\dim \text{Ker}(g) \geq 2$.

4. Déterminer une base du noyau $\text{Ker}(g)$ et en déduire les valeurs de $\dim \text{Ker}(g)$ et de $\text{rang}(g)$.

5. Prouver que A^2 est dans $\text{Ker}(g)$ et en déduire que c'est une combinaison linéaire de I_2 et de A. Donner une base de $\text{Im}(g)$.

Exercice 5.5.— * Application linéaire dans l'espace des matrices

Soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $f(M) = A\,M$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

Exercice 5.6.— * Multiples d'une matrice

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées 2×2, et soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On veut étudier l'ensemble E des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *multiples de A (à droite)*, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M = AQ$. Pour cela on introduit l'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(Q) = AQ$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $Q \in \text{Ker} f$ si et seulement si les trois colonnes de Q sont dans le noyau de $f_A : X \mapsto AX$.

4. Donner une base de $\text{Ker}(f_A)$. En déduire une base de $\text{Ker}(f)$.

5. Que vaut $\text{rang}(A)$? Que vaut $\text{rang}(f)$?

6. Montrer que M est dans $\text{Im}(f)$ si et seulement si chacun des trois vecteurs colonnes de M est dans $\text{Im}(A)$. Montrer que M est multiple de A si et seulement si $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(A)$.

Exercice 5.7.— Caractérisations d'une bijection linéaire.

1. En déterminant leur noyau, démontrer que les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ci-dessous sont bijectives, en déterminer leur matrice dans la base canonique, et calculer leur inverse :

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par} \\ f(x, y) = (2x - 5y, 7x) & f(x, y, z) = (4x + y + 4z, 3x + y + 4z, x + y + 3z) \end{array}.$$

2. En déterminant leur rang, montrer que les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ci-dessous sont bijectives, en déterminer leur matrice dans la base canonique, et calculer leur inverse :

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ donnée par} & f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ donnée par} \\ f(x,y) = (5x+3y, 3x+2y) & f(x,y,z) = (x+3y+z, x+y+z, 2x+4y-z) \end{array}.$$

3. Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-z);\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y);$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y+z, x-z, 3x+y-z);$$
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y-z, x-y+2z, 2x+y+z).$$

Exercice 5.8.— Symétrie par rapport à une droite du plan. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les deux droites D et Δ d'équations respectives $x-2y=0$ et $2x-y=0$.

1. Vérifier que $D \oplus \Delta = \mathbb{R}^2$. On note s la symétrie par rapport à D paralèllement à Δ.

2. Que dire de $s(s(u))$? En déduire que pour tout vecteur $u' \in \mathbb{R}^2$ l'équation $s(u) = u'$ admet une et une seule solution. Que dire de $\mathrm{Ker}(s)$? de $\mathrm{Im}(s)$?

3. Calculer l'image par s des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique, et en déduire la matrice de s dans cette base. Pour $u = (x,y)$ expliciter alors $s(u)$ en fonction des composantes x, y.

Exercice 5.9.— Projection sur une droite de l'espace. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ la droite engendrée par le vecteur $v_0 = (1,2,-1)$. Soit d'autre part $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x-y+z=0$.

1. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. On note p la projection sur D paralèllement à P.

2. Déterminer $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$, et en donner des bases.

3. Soit M la matrice de p dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
 a. Déterminer $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$ et en déduire M.
 b. Pour $u = (x,y,z)$ expliciter $p(u)$ en fonction des composantes x, y, z.

Exercice 5.10.— Projection dans l'espace des polynômes. A toute fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on associe la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}[P(t) + P(-t)]$. On note $\pi(P)$ cette fonction.

1. Montrer que si P est dans l'espace $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ des fonctions polynomiales réelles de degré $\leq n$ alors il en va de même pour $\pi(P)$. *Ainsi $P \mapsto \pi(P)$ définit une application de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dans lui même.*

2. Montrer que $\pi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.

3. Déterminer le noyau de π, ainsi que son image. Quelle est la matrice de π dans la base $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$?

4. Vérifier que π est une projection. Déduire de ce qui précède que tout polynôme P de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.

Exercice 5.11.— * Un théorème de Bézout. On considère les fonctions polynomiales $P(t) = t^3 - 1$ et $Q(t) = t^4 + t^2 + 1$. On veut étudier l'ensemble des diviseurs communs de P et Q, autrement dit l'ensemble $\mathcal{D}$ des polynômes $D(t)$ tels qu'il existe deux polynômes $A(t)$ et $B(t)$ vérifiant $A(t)D(t) = P(t)$ et $B(t)D(t) = Q(t)$. On note $(a,b,c,d,e,\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^9$ et on introduit une application $f : \mathbb{R}^9 \to \mathcal{P}_7$ (l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 7), définie par

$$f(a,b,c,d,e,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4) \times P(t) + (\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3) \times Q(t)$$

1. Montrer que f est linéaire. Montrer que si un polynôme $R(t)$ est dans $\mathrm{Im} f$ alors il est divisible par chaque polynôme $D(t)$ de $\mathcal{D}$.

2. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

3. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que si $D(t) \in \mathcal{D}$ et si $A(t)D(t) = P(t)$ et $B(t)D(t) = Q(t)$ avec $A(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$ et $B(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$, alors $f(a, b, c, d, e, -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = 0$.

4. a. Donner le rang de f.

b. Montrer que si $R_1(t)$ et $R_2(t)$ sont dans Imf, non nuls, et de degré minimum, alors $R_1(t)$ et $R_2(t)$ sont proportionnels. Donner un polynôme non nul de degré minimum dans Imf.

c. Montrer que $R(t)$ est dans Imf si et seulement si $R(t)$ est un polynôme de degré ≤ 7 divisible par le polynôme $D_0(t) = 1 + t + t^2$.

5. Montrer que $D_0(t)$ est le plus grand diviseur commun de $P(t)$ et $Q(t)$. Soit A_0, B_0 le quotient de P, Q par D_0 : calculer explicitement $A_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t$ et $B_0(t) = a_0 + b_0 t + c_0 t^2$.

6. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes $U_0(t), V_0(t)$, avec U_0 de degré $< 2 = \deg Q - \deg D_0$ et U_0 de degré $< 1 = \deg P - \deg D_0$, tel que $D_0(t) = U_0(t)P(t) + V_0(t)Q(t)$.

Exercice 5.12.— * Interpolation de Lagrange. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 3. Soient d'autre part a, b, c, d quatre réels **distincts**. On considère l'application $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(P) = (P(a), P(b), P(c), P(d))$.

1. Vérifier que f est linéaire.

2. A quelle condition un polynôme $P \in \mathcal{P}_3$ est-il dans Ker(f) ? En déduire que f est bijective (on pourra utiliser le lien entre racines et factorisation). Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(t)$ de degré ≤ 3 tel que $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ lorsque $x = 0, 1, 2, 3$ (on ne demande pas de déterminer $Q(t)$!).

3. Puisque f est bijective, soient L_1, L_2, L_3, L_4 les polynômes de $\mathcal{P}_3$ dont les images par f sont e_1, e_2, e_3, e_4 (la base canonique).

a. Sans calculer les L_i montrer que $\ll= (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est une base de $\mathcal{P}_3$. Comment obtenir les coordonnées de $P \in \mathcal{P}_3$?

b. Calculer $f((x-a)(x-b)(x-c))$ et en déduire L_4. Déterminer de même explicitement L_1, L_2, L_3. Déterminer explicitement le polynôme $Q(t)$ de la question 2.

Exercice 5.13.— Différentes bases de $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), u = (4, 3), v = (5, 4), w = (6, 5)$ et on pose :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2), \mathcal{B}' = (u, v), \mathcal{B}'' = (v, w)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage P' de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner alors la matrice de passage P'' de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse.

3. Soit $u = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$. Déterminez les coordonnées (x, y), (x', y') et (x'', y'') de u dans les trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

Exercice 5.14.— Matrices de passage dans $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer l'inverse de P.

2. Soit $u = 2u_1 - 3u_2 + 5u_3$. Quelles sont les coordonnées x', y', z' de u dans $\mathcal{B}'$? Quelles sont les composantes x, y, z de u ? Quel calcul matriciel permet aussi de déterminer x, y, z ?

3. Soit $v = (1, 2, 3)$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les coordonnées x', y', z' de v dans $\mathcal{B}'$? Donner x', y', z'.

4. On pose $E = \text{Vect}(u_1, u_2)$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur x', y', z' le vecteur $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$ appartient-il à E ? Donner une équation cartésienne de E (dans les coordonnées x, y, z).

Exercice 5.15.— Changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^4$ soient $u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (2,1,0,1), u_3 = (1,1,-1,1)$ et soit $E = \mathrm{Vect} u_1, u_2, u_3$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre et compléter cette famille en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et rappeler le lien entre les colonnes X, X' des coordonnées d'un vecteur u dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

3. Calculer P^{-1}.

4. A quelle condition sur les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$ a t-on $u \in E$? En déduire un système d'équations cartésiennes de E (aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4).

Exercice 5.16.— * Matrices de passage dans l'espace des polynômes.
Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré ≤ 3.

1. On fixe un réel a. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (t \mapsto 1, t \mapsto t-a, t \mapsto (t-a)^2, t \mapsto (t-a)^3)$ est une base de $\mathcal{P}_3$ (noter que $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathcal{P}_3$).

2. Quelle est la matrice de passage P_a de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_a$? Calculer l'inverse de P_a.

3. Application numérique : déterminer les réels a, b, c, d tels que $P(t) = 1 + t + t^2 + t^3$ s'écrive sous la forme $P(t) = a + b(t+1) + c(t+1)^2 + d(t+1)^3$. Retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 5.17.— Différentes matrices d'une même application linéaire.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 2z)$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.

2. Donner la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques $\mathcal{B}^3, \mathcal{B}^2$.

3. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Montrer qu'il existe des vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u_1) = (0,0), f(u_2) = (1,0)$ et $f(u_3) = (0,1)$ (avec $u_1 \neq 0$). Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}^2)$.

Pour $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, montrer qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathrm{Vect} u_2, u_3$ tel que $f(u) = v$. En déduire toutes les solutions de $f(u) = (1,1)$.

5. Vérifier que $\mathcal{B}'' = ((1,-1),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}'')$.

Exercice 5.18.— On se donne d'une part la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et d'autre part les familles $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(2,1,0),(0,1,1)\big), \mathcal{B}' = \big((1,2,3),(-1,0,1),(1,1,0)\big)$. Enfin on note $\mathcal{B}^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires telles que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}') = A.$$

2. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ calculer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{B}^3$.

3. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker} A$. A t-on $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$? Comparer $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

4. $(*)$ Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
a. Déterminer P.

b. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on note X_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}^3$, Y_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$, et enfin Y'_u la colonne des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$.

Exprimer $Y_{f(u)}$, puis $Y'_{g(u)}$, en fonction de X_u et A. En déduire que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ on a $Y_{g(u)} = PY_{f(u)}$. Retrouver alors les résultats de la question 3) sur le noyau et le rang de f et g.

Exercice 5.19.— Applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x+2y+2z, 2x+3y-z, x+2y+z)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{rang} f$. Montrer que f est bijective.

3. Montrer que pour toute colonne Y l'équation $AX = Y$ admet une unique solution X. Montrer que A est inversible et calculer son inverse. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -3, 1), u_3 = (2, 3, 3)$. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la canonique, puis la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f$.

b. Pourquoi l'équation $A'X' = Y'$ admet-elle une unique solution X', quelle que soit la colonne Y' ? En déduire que A' est inversible.

c. Déterminer l'inverse de A'.

Exercice 5.20.— Formes particulières de la matrice dans des bases convenables : rang et noyau.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x+y+z, 2x+y+3z, x+2z, 2x+2y+2z)$.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. Donner une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Im}(f)$. Donner deux vecteurs u_1, u_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$. Donner une base (u) de $\mathrm{Ker} f$.

b. On pose $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u)$: montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Compléter (v_1, v_2) en une base de $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}(f)$.

d. Si on note a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un vecteur u dans $\mathcal{B}_1$ et b_1, b_2, b_3, b_4 les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}_2$, quelles sont les relations exprimant les b_i en fonction des a_j ?

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner alors une base de $\mathrm{Im} f$ et une base de $\mathrm{Ker} f$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

Exercice 5.21.— On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (2, -3, -2), u_3 = (-2, 3, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer son inverse P^{-1}.

On pose $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

2. Quelle formule utilisant P, P^{-1} et A permet de calculer A' ? Déterminer A' puis calculer $A \times A$.

Exercice 5.22.— Changement de bases Soit $B = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(u_1) = -u_1 + 2u_3,\ f(u_2) = -u_2 + 2u_3,\ f(u_3) = u_3.$$

1. Donner la matrice de f dans la base B. Si $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ désigne les coordonnées d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ dans la base B, quelles sont les coordonnées de $f(v)$ dans B ?

2. Soit $F_{-1} = v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = -v$. Montrer que F_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner ses équations cartésiennes, ainsi qu'une base que l'on notera V_{-1}.

3. Soit $F_1 = v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = v$. Donner les équations cartésiennes de F_1, ainsi qu'une base que l'on notera V_1.

4. Soit $V = V_{-1} \cup V_1$. Montrer que V est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Ecrire la matrice de passage P de la base B vers la base V et calculer P^{-1}.

6. Ecrire la matrice de f dans la base V. Que vaut $f \circ f$? Que dire de f ?

Exercice 5.23.— examen 2015

Soit un paramètre $t \in \mathbb{R}$ et M_t la matrice suivante :

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5t & 1-3t & 2t \\ 5t & -3t & 1+2t \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de t la matrice M_t est-elle inversible ?

2. On note M_1 la matrice M_t lorsque $t = 1$ et f_1 l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont M_1 est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Donner une base de $\ker f_1$, que l'on notera B_0.

b. Donner une base de $\mathrm{Im} f_1$, que l'on notera B_1.

c. Démontrer que la suite B, obtenue en juxtaposant B_0 et B_1, est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $\ker f_1 \bigoplus \mathrm{Im} f_1 = \mathbb{R}^3$.

d. Ecrire la matrice de f_1 dans la base B.

e. Que vaut $f_1 \circ f_1$? Montrer que f_1 est une projection.

f. Calculer la matrice de passage, que l'on notera P, de la base canonique à la base B.

g. Quelle relation peut-on écrire entre M_1, P et la matrice de f_1 dans la base B ?

3. On note M_2 la matrice M_t lorsque $t = 2$ et f_2 l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont M_2 est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 5, 5),\ u_2 = (4, 6, -1),\ u_3 = (0, 1, 1)$$

.

a. Démontrer que $U = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Ecrire la matrice de f_2 dans la base U.

c. Démontrer que f_2 est une symétrie, et déterminer par rapport à quels espaces.

Exercice 5.24.— examen de rattrapage 2015

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_3, -x_1 - x_2 + 3x_3).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2. Calculer une base de $\mathrm{Im} f$ et de $\mathrm{Ker} f$. L'application f est-elle bijective ?

3. Soit $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (3, 2, -5)$. Montrer que la suite $V = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Donner la matrice de passage de la base canonique vers la base V.

5. Calculer $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ et donner leurs coordonnées dans la base V.

6. Donner la matrice de f dans la base V.