Université Paris Sud **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2019-20 **Algèbre linéaire**

Corrigé de la feuille 4

...

Exercice 4.1.— Relations entre colonnes et solutions d'un système On considère le système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

aux inconnues x, y, z, t. On note A la matrice correspondant au système (S). On note $E \subset \mathbb{R}^4$ l'espace des solutions de (S).

1. Expliciter la matrice A.

Réponse : La matrice A est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Le système (S) peut alors se réécrire, en posant

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad AX = 0.$$

2. On note $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de A, de sorte que le système (S) traduit l'égalité $x\,C_1 + y\,C_2 + z\,C_3 + t\,C_4 = 0$. Calculer : le rang de (S), une relation de dépendance linéaire entre C_1, C_2 et C_3, une autre entre C_1, C_2 et C_4, et en déduire une base (v_3, v_4) de E.

Réponse : On commence par échelonner le système (S) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 0 \\ 2x+y+z+3t & = & 0 \\ x+2y-z+3t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccccl} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 & \\ & & 3y & - & 3z & + & 3t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ & & 3y & - & 3z & + & 3t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccccl} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 & \\ & & 3y & - & 3z & + & 3t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{array}\right.$$

On a donc 2 pivots (=inconnues principales) x et y, le rang du système est donc 2. Les inconnues secondaires z et t permettent de trouver des relations de dépendances linéaires grâce au système (S) que l'on réécrit

$$xC_1+yC_2+zC_3+tC_4=0.$$

En posant $z=1$ et $t=0$ on en déduit grâce au système echelonné que $y=1$ et $x=-1$ donc que

$$-C_1+C_2+C_3=0.$$

De même en posant $z=0$ et $t=1$ on trouve $y=-1$ et $x=-1$, i.e.

$$-C_1-C_2+C_4=0.$$

Soit $F=Sol(S)\subset\mathbb{R}^4$, alors une base de F est donné grace aux inconnues secondaires dans le système echelonné *réduit* associé à (S), c'est à dire, en reprenant les calculs précédents,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 0 \\ 2x+y+z+3t & = & 0 \\ x+2y-z+3t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Autrement dit les solutions de (S) sont de la forme

$$\begin{pmatrix} -z-t \\ z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $F = Sol(S)$.

Exercice 4.2.— Sous-espaces de matrices Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de la forme $S(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (avec a, b deux réels quelconques). Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de la forme $T(c,d) = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ (avec c, d deux réels quelconques)

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des plans vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse : Notons d'abord que pour tous réels a, b, a', b', λ, on a

$$\lambda S(a,b) + S(a',b') = S(\lambda a + a', \lambda b + b') \in \mathcal{S}.$$

Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. De plus la famille de matrices

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

est clairement libre et engendre $\mathcal{S}$. C'est donc une base et $\dim \mathcal{S} = 2$: $\mathcal{S}$ est un plan. De même, pour tous réels c, d, c', d', λ :

$$\lambda T(c,d) + T(c',d') = T(\lambda c + c', \lambda d + d') \in \mathcal{T},$$

et $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. La famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est libre et engendre $\mathcal{T}$, qui est donc un plan vectoriel.

2. Montrer que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réponse : Montrons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont en somme directe. Soit donc $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $M = S(a,b) = T(c,d)$. On a alors, et regardant les coefficients diagonaux : $c = a = -c$. On trouve $a = c = 0$. En regardant les coefficients anti-diagonaux, on trouve $b = d = -b$ puis $b = d = 0$. Ainsi M est la matrice nulle. L'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ est donc reduite au singleton $\{0\}$ et ces deux sous-espaces sont donc en somme directe.
Soit maintenant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle. On a

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S\left(\frac{a+d}{2}, \frac{c-b}{2} \right) + T\left(\frac{a-d}{2}, \frac{c+b}{2} \right)$$

En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est somme d'une matrice de $\mathcal{S}$ et d'une matrice de $\mathcal{T}$. On a bien $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$.

Exercice 4.3.— **Produits de matrices** Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB et le produit BA, pour :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$
et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Réponse : Le produit AB n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On calcule alors :

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\11&-3\\17&-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&5\\6&8\end{pmatrix}.$$

Le produit BA n'a de sens que si le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B. On calcule alors

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-3&-4&-5&-6\\0&0&0&0&0&0\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times4&1\times2+(-1)\times5&1\times3+(-1)\times6\\2\times1+0\times4&2\times2+0\times5&2\times3+0\times6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\2&4&6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\-2&-4&-6\\8&10&12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&10\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4.— Produits de matrices Calculer les produits AE_1, E_1A, AE_2, E_2A, AP et PA avec :

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix},E_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Que remarquez vous ?

Réponse :

$$AE_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$E_2A = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AP = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix} \qquad PA = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

On observe qu'en multipliant A à droite par P, on permute les colonnes de A, alors qu'en multipliant à gauche par P, on permute les lignes de A.

Exercice 4.5.— **Puissances de matrices** 2×2**.** Dans la suite on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \geq 1$ un entier on considère le produit de la matrice $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ termes}}$ que l'on note A^n. On pose aussi $A^0 = I_2$où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité 2×2). Ainsi l'on a $A^{n+1} = A.A^n$ pour $n \geq 0$.

1. Vérifier la relation suivante : $A^2 = 3A - I_2$. Exprimer de même A^3 en fonction de A et I_2. En déduire que pour tout entier naturel n , A^n est combinaison linéaire des matrices A et I_2.

Réponse : On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3A - I_2$. Donc $A^3 = A \cdot A^2 = A(3A - I_2) = 3A^2 - A = 9A - A - 3I_2 = 8A - 3I_2$. La propriété demandée est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie pour un entier naturel n, c'est à dire qu'il existe deux réels x_n et y_n vérifiant $A^n = x_nA + y_nI_2$. On a alors :

$$A^{n+1} = x_nA^2 + y_nA = (3x_n + y_n)A - x_nI_2.$$

Le raisonnement par récurrence nous permet de conclure que la propriété est vraie pour tout n, c'est à dire que pour tout entier n A^n est combinaison linéaire de A et I_2.

2. Prouver que la famille (A, I_2) est une famille libre dans l'espace vectoriel $M_2(R)$.

Réponse : Si t et t' deux réels tels que $tA + t'I_2 = \begin{pmatrix} t+t' & t \\ t & 2t+t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient immédiatement, en identifiant les coefficients des matrices, que $t = t' = 0$.

3. a. Déduire de ce qui précède que pour tout entier $n \geq 2$ il existe un unique couple d'entiers relatifs (a_n, b_n) tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ et donner une formule de récurrence permettant de calculer (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n). Que valent (a_0, b_0) et (a_1, b_1) ?

Réponse : En reprenant la démonstration faite à la première question en remplaçant x_n et y_n par a_n et b_n on obtient que première que

$$A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA = (\underbrace{3a_n + b_n}_{a_{n+1}})A \underbrace{-a_n}_{b_{n+1}} I_2. \tag{1}$$

Si $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ alors il est clair que $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{Z}$. La propriété est donc vérifiée par récurrence. On a : $(a_0, b_0) = (0, 1)$, $(a_1, b_1) = (1, 0)$.

b. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ on $X_{n+1} = BX_n$.

Réponse : En utilisant l'équation (1) on obtient $X_{n+1} = BX_n$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c. Montrer que B^2 s'exprime en fonction de B et I_2 comme A^2 s'exprime en fonction de A et I_2.

Réponse : $B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, on vérifie $B^2 = 3B - I_2$, c'est la même relation que pour A.

Exercice 4.6.— **Matrices représentant les complexes.** On reprend les notations de l'exercice 4.2.

1. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}$ est encore dans $\mathcal{S}$. Calculer en particulier $S(a, b)S(a, -b)$. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{S}$, mais que les produits $S(a, b)T(c, d)$ et $T(c, d)S(a, b)$ sont dans $\mathcal{T}$.

Réponse : On vérifie que $S(a, b)S(a', b') = S(aa' - bb', a'b + ab') \in \mathcal{S}$ $S(a, b)S(a, -b) = (a^2+b^2, 0)$,$T(c, d)T(c', d') = S(cc'+dd', c'd-d'c) \in \mathcal{S}$, $S(a, b)T(c, d) = T(ac-bd, bc+ad) \in \mathcal{T}$ et $T(c, d)S(a, b) = T(ac + bd, ad - bc) \in \mathcal{T}$.

2. Montrer que les calculs de sommes et de produits avec les nombres complexes $a + ib$ correspondent exactement aux calculs de sommes et de produits avec les matrices $S(a, b)$. A quoi correspond le passage de $S(a, b)$ à $S(a, -b)$ du point de vue des nombres complexes ?

Réponse : Définissons l'application Φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{S}$ par $\Phi(a+ib) = S(a, b)$. On a $\Phi(a+ib) = \Phi(a' + ib') \iff S(a, b) = S(a', b') \iff a = a', b = b' \iff a + ib = a' + ib'$, c'est à dire que Φ est injective. De plus toute matrice $S(a, b)$ dans $\mathcal{S}$ admet pour antécédent par Φ le complexe $a + ib$ c'est à dire que Φ est surjective. Φ est donc une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{S}$. En utilisant la première question on écrit $\Phi(a + ib)\Phi(a' + ib') = S(a, b)S(a', b') = S(aa' - bb', a'b + ab') = \Phi\left((a + ib)(a' + ib')\right)$ et $\Phi(a + ib) + \Phi(a' + ib') = S(a, b) + S(a', b') = S(a + a', b + b') = \Phi(a + ib) + \Phi(a' + ib')$. C'est à dire que les calculs de sommes et de produits se correspondent dans $\mathcal{S}$ et $\mathbb{C}$. On a $\Phi(\overline{a + ib}) = S(a, -b)$, c'est à dire que le passage de $S(a, b)$ à $S(a, -b)$ correspond à la conjugaison des nombres complexes.

3. On introduit les matrices $R := S(0, 1), \Sigma := T(1, 0), \Sigma' := T(0, 1)$. D'autre part un point M du plan est identifié à la matrice colonne $X_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ de ses coordonnées.

a. On définit une transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $\sigma(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est ΣX_M. Décrire géométriquement la transformation $\sigma : M \mapsto \sigma(M)$.

Réponse : $\Sigma = T(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si $M(x_M, y_M)$ alors on a $M_1 = \sigma(M) = (x_M, -y_M)$. Si le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'application σ est donc la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b. On définit une autre transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $\sigma'(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est $\Sigma' X_M$. Décrire géométriquement la transformation $\sigma' : M \mapsto \sigma'(M)$.
Réponse : Dans cette question et la suivante suppose le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct. $\Sigma' = T(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M(x_M, y_M)$ alors on a $M_2 = \sigma'(M) = (y_M, x_M)$. Le milieu du segment $[MM_2]$ a pour coordonnées $(\frac{x_M+y_M}{2}, \frac{x_M+y_M}{2})$, et le produit scalaire des vecteurs $u(1,1)$ et $M\vec{M}_2$ est nul. σ' est donc la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
c. On définit une dernière transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $r(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est RX_M. Décrire géométriquement la transformation $r : M \mapsto r(M)$. Montrer que r est la transformation composée $\sigma' \circ \sigma$.
Réponse : $R = S(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M(x_M, y_M)$ alors on a $M_3 = r(M) = (-yM, x_M)$. D'après la seconde question la transformation R correspond à la multiplication pas i dans les complexes. C'est donc la rotation de centre l'origine et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. On dit qu'une transformation du plan est une rotation de centre l'origine et d'angle θ si elle fait correspondre $M(a, b)$ le point $M'(a'b')$ tel que $a' + ib' = (a + ib)(\cos\theta + i \sin\theta)$. On a alors $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a'^2 = b'^2} = OM'$ et l'angle orienté $(O\vec{M}, O\vec{M}')$ est l'argument du complexe $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \theta(\mod 2\pi)$.
Puisque $\Sigma'\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R$ on peut affirmer que $r = \sigma' \circ \sigma$.

Exercice 4.7.— Matrices magiques réelles. On travaille dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées 3×3. Pour alléger on note les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *magique* si la somme des coefficients de A dans une ligne ou dans une colonne est un nombre indépendant de la ligne ou la colonne. Ce nombre, noté $s(A)$, est appelé la *somme* de la matrice magique A. On note E l'ensemble de toutes les matrices magiques. On aimerait pouvoir décrire toutes les matrices magiques.
1.

— Vérifier que la matrice identité I_3 est magique de somme 1.
Réponse : C'est immédiat.

— Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Réponse : On vient de constater ci-dessus que $I_3 \in E$; c'est-à-dire que $E \neq \emptyset$. Pour A et A' des éléments de E de sommes respectives $s(A)$ et $s(A')$, α et α' des

réels :

$$\alpha A + \alpha' A' \ = \ \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' a' & \alpha d + \alpha' b' & \alpha c + \alpha' c' \\ \alpha b + \alpha' d' & \alpha e + \alpha' e' & \alpha f + \alpha' f' \\ \alpha g + \alpha' g' & \alpha h + \alpha' h' & \alpha i + \alpha' i' \end{pmatrix}$$

et il est immédiat de constater que $\alpha A + \alpha' A'$ est magique de somme

$$(*) \ : \ s(\alpha A + \alpha' A') \ = \ \alpha s(A) + \alpha' s(A') \ .$$

2. Montrer que le produit de deux matrices magiques A et A' est encore magique, et calculer $s(AA')$ en fonction de $s(A)$ et $s(A')$.
Réponse : On a :

$$\begin{aligned} AA' \ &= \ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' & c' & & \\ d' & e' & f' & & \\ g' & h' & i'a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{pmatrix} \\ &= \ \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Il en résulte que AA' est magique de somme $s(A)s(A')$.
3. Soit F l'ensemble des matrices magiques de somme nulle.
a.

— Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
Réponse : La formule $(*)$ établie en assure que s est une application linéaire (et même une forme linéaire) dont F est par définition le noyau si bien que F est un sous-espace vectoriel de E.

Si ces notions ne sont pas encore connues, on peut néanmoins utiliser la formule $(*)$ déjà citée pour répondre à la question.

En effet, il est immédiat que la matrice nulle, *i.e.* la matrice dont tout les coefficients sont nuls, est élément de F qui, de ce fait n'est pas vide. La formule $(*)$ assure alors que F est stable par combinaisons linéaires et que c'est donc un sous-espace vectoriel de e.

Montrer que la droite D engendrée par I_3 est un supplémentaire de F dans E.
Réponse : Pour tout $A \ \in \ E$, il découle toujours de la formule $(*)$ de que

$$s(A - s(A)I_3) \ = \ s(A) - s(s(A)I_3) \ = \ s(A) - s(A)s(I_3) \ = \ 0$$

c'està-dire que,

$$\forall A \ \in \ E \ , \ A - s(A)I_3 \ \in \ F \ .$$

Or $s(A)I_3 \ \in \ D$, si bien qu'en écrivant tout $A \ \in \ E$ sous la forme

$$A \ = \ (A - s(A)I_3) + s(A)I_3$$

on montre que

$$E = F + D .$$

En outre si $A \in D \cap F$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $A = kI_3$ et

$$0 = s(A) = s(kI_3) = ks(I_3) = k$$

ce qui entraîne $A = 0$, et finalement que la somme $F + D$ est directe *i.e.*

$$E = F \oplus D .$$

b.

— Donner un système d'équations cartésiennes et une base de F.

Réponse : Pour tout $A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E$, $A \in F$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b-c \\ & = & e+f+h+i \\ b & = & -e-h \\ c & = & -f-i \\ d & = & -e-f \\ g & = & -h-i \end{array}\right\}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} e+f+h+i & -e-h & -f-i \\ -e-f & e & f \\ -h-i & h & i \end{pmatrix} \\ &= e\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , A_3 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une famille génératrice de F dont on constate presque immédiatement qu'elle est libre (ce quon peut également lire sur le nombre d'inconnues principales du système qu'on a résolu pour la trouver.) C'est donc une base de F.

— Donner une base de E.

Réponse : Puisque $E = F \oplus D$, la réunion d'une base de F et d'une base de D est une base de E ainsi $(A_1, A_2, A_3, A_4, I_3)$ est une base de E.

4. Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *supermagique* si elle est magique, et que de plus la somme des coefficients diagonaux et la somme des coefficients anti-diagonaux vaut $s(A)$.
a. Montrer que l'ensemble des matrices supermagiques de somme nulle est un plan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Réponse : Soit P l'ensemble des matrices super magiques de somme nulle. Il s'agit, en reprenant les notations de ce qui précède, du sous ensemble de F vérifiant en plus les équations

$$a + e + i = 0 \text{ et } c + e + g = 0 \ .$$

C'est donc encore l'ensemble de solution d'un système linéaire Σ' et par conséquent un sous-espace vectoriel de F.
Le système Σ' est donné par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -i \\ b & = & -h \\ c & = & h+i \\ d & = & h+2i \\ 3e & = & 0 \\ f & = & -h-2i \\ g & = & -h-i \end{array}\right\}$$

Il s'ensuit que $A \in P$ si et seulement si

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -i & -h & h+i \\ h+2i & 0 & -h-2i \\ -h-i & h & i \end{pmatrix} \\ &= h \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \end{aligned}$$

si bien que

$$\left\{ A_5 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_6 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de P qui se trouve donc être de dimension 2.
b. Montrer que l'espace G de toutes les matrices supermagiques est un sous-espace vectoriel contenant la matrice J_3 dont tous les coefficients valent 1, et en donner une base.
Réponse : L'ensemble G est le sous-ensemble de E défini par les équations

$$a + e + i = a + b + c \text{ et } c + e + g = a + b + c \ .$$

C'est donc l'intersection de E avec l'ensemble des solutions d'un système linéaire ; *i.e.* l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, donc un sous-espace vectoriel de E.

On vérifie immédiatement que J_3 est une matrice super magique de somme 3. Alors pour tout $A \in G$,

$$s(A - \frac{1}{3}s(A)J_3) \;=\; s(A) - \frac{1}{3}s(A)s(J_3) \;=\; 0 \;;$$

c'està-dire que

$$\forall A \in G \;,\; A - \frac{1}{3}s(A)J_3 \in P \;.$$

Comme $J_3 \notin P$, on en déduit que

$$G \;=\; P \oplus \mathrm{Vect}(J_3)$$

si bien que (A_5, A_6, J_3) est une base de G.

c. Expliciter une matrice supermagique $A \in G$ dont l'ensemble des coefficients est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (on pourra commencer par calculer la somme, puis en déduire le coefficient e, et enfin constater que deux coefficients symétriques par rapport à e sont de somme 10).

Réponse : Si une telle matrice

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \;\in\; G$$

existe

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i = \;3s(A) \;=\; 45$$

d'où l'on tire

$$s(A) \;=\; 15 \;.$$

En écrivant $A \;=\; kJ_3 + B$ avec $B \in P$, on a

$$s(A) \;=\; ks(J_3) \;=\; 3k \;.$$

En constatant que le coefficient $2, 2$ des matrices A_5 et A_6 est nul, et qu'il en est donc ainsi de tout élément de P, on en déduit que

$$b \;=\; k \;=\; \frac{1}{3}s(A) \;=\; 5 \;.$$

Écrivons

$$A \;=\; \ell A_5 + mA_6 + 5J_3 \;.$$

Le fait qu'on exige que tous les coefficients de A soient compris entre 1 et 9? entraîne :

$$\begin{pmatrix} 1 & \leq & \ell+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & -\ell+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & m+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & -m+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & \ell+m+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & -\ell-m+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & \ell+2m+5 & \leq & 9 \\ 1 & \leq & -\ell-2m+5 & \leq & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} -4 & \leq & \ell & \leq & 4 \\ -4 & \leq & m & \leq & 4 \\ -4 & \leq & \ell+m & \leq & 4 \\ -4 & \leq & \ell+2m & \leq & 4 \end{array}$$

Par ailleurs si on exige que tous les coefficients de la matrice A soient deux à deux distincts, on n'aura

$$\text{ni } \ell \ = \ m\ , \quad \text{ni } \ell \ = \ -m\ , \quad \text{ni } \ell \ = \ 0\ , \quad \text{ni } m \ = \ 0\ .$$

Par ailleurs

$$m \ = \ 4\ ,\ \ell \ \geq \ -4 \text{ et } \ell+2m \ \leq \ 4 \ \Rightarrow \ \ell \ = \ -4$$

ce qui contredit ce que nous avons observé immédiatement avant. De la même manière

$$m \ = \ -4 \ \Rightarrow \ \ell \ = \ 4,$$

si bien qu'on a

$$-3 \ \leq \ m \ \leq \ 3\ .$$

Pour $m \ = \ 3$, $\ell+2m \ \leq \ 4$ $\ell \ \leq \ -2$. Puisqu'on s'interdit $\ell \ = \ -3$, on a $\ell \ = \ -2$ ou -4, qui donne les matrices :

$$A_{-2,3} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } A_{-4,3} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}\ .$$

On laisse le lecteur examiner s'il peut trouver des solutions pour $m \ = \ 1$ ou $2\ldots$

Remarque 1. On aurait pu raisonner autrement pour trouver le coefficient (2,2) : l'idée étant que par invariance d'une matrice par rotation d'angle $\pi/2$, le chiffre central devant être "symmétrique" parmi $1, \ldots, 9$ cela ne peut-être que 5. Mais ceci n'est pas une preuve ! (ou au moins, ce n'est pas une preuve pour un mathématicien... pour un physicien peut-être ?). En voici une :
Evidemment si tous les coefficients apparaissent une et une unique fois, la somme de tous les coefficients de la matrice est 45, donc la somme d'un ligne (ou d'une colonne, ou d'une diagonale) est 15. Si on somme la colonne centrale, la ligne centrale et les deux diagonales, on obtient donc $4*15 = 60$. Or chaque coefficient est compté une unique fois... sauf le coefficient central qui est compté 4 fois ! Autrement dit, $60 = 45 + 3 \times a_{2,2}$, c'est à dire $a_{2,2} = 5$!

Exercice 4.8.— Inverse d'une matrice
Calculer l'inverse de la matrice A et dire pour quelles valeurs du paramètre m la matrice B est inversible et calculer son inverse pour ces valeurs :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse : Pour calculer l'inverse d'une matrice, on applique la méthode décrite dans la section 3.4.3 du polycopié de cours.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour transformer la matrice de gauche en la matrice identité I_3 :

  - On effectue d'abord $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ pour obtenir :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - Ensuite, on effectue $L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ pour obtenir :
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - On effectue maintenant $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_3$ pour obtenir :
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - Finalement, on effectue $L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$, $L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$ pour obtenir :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & -7/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

  On conclut finalement que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & -7/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour transformer la matrice de gauche en la matrice identité I_3 :

- On effectue d'abord $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & m-2 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. .$$

- Ensuite, on effectue $L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 + (m-2)L_2$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3m \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1-2m & m-2 & 3 \end{pmatrix} \right. .$$

- On effectue maintenant $L_1 \leftarrow mL_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow mL_2 - L_3$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & -3m & 0 \\ 0 & 0 & -3m \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1-3m & 3m-2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1-2m & m-2 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On en conclut que la matrice de départ peut être transformée à l'aide du pivot de Gauss en la matrice identité I_3 si, et seulement si, $m \neq 0$, de sorte que B est inversible si, et seulement si, $m \neq 0$. Le cas échéant, on termine l'algorithme du pivot de Gauss en effectuant les opérations $L_1 \leftarrow \frac{1}{3m}L_1$, $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3m}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{3m}L_3$ pour obtenir que :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} (1-3m)/(3m) & (3m-2)/(3m) & 1/m \\ 1/(3m) & -2/(3m) & 1/m \\ (2m-1)/(3m) & (2-m)/(3m) & -1/m \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9.— Puissance et inverse d'une matrice

1. Calculer E^3 et dire si la matrice E est-elle inversible, où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse : On calcule les puissances successives de E en appliquant la formule du produit matriciel (voir la définition 3.2.2) :

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

ainsi $E \times E^2 = I_3 = E^2 \times E$, de sorte que E est inversible et $E^{-1} = E^2$ (voir la définition 3.4.1).

2. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer A^2 et A^3.
b. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I = 0$ où I est la matrice identité et 0 la matrice nulle.
c. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
Réponse :

a. On calcule les puissances successives de A en appliquant la formule du produit matriciel (voir la définition 3.2.2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. On cherche $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$, ce qui d'après la question précédente équivaut à :

$$\begin{pmatrix} 1+c & a & 3+b \\ 3+b & 1+3a+c & 9+a+3b \\ a & 3+b & 1+3a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi $(a, b, c) = (0, -3, -1)$ convient.

c. D'après la question précédente, il vient $A^3 - 3A = I$, c'est-à-dire $A(A^2 - 3I_3) = I_3 = (A^2 - 3I_3)A$, ainsi A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (voir la définition 3.4.1).

Exercice 4.10.— ***** Soit un paramètre $a \in \mathbb{R}$ et M_a la matrice suivante :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer M_0.
b. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ calculer le produit $M_a\,M_b$ et en déduire que :

$$M_a\,M_b = M_{a+b}.$$

c. Calculer M_a^n pour tout entier n et tout $a \in \mathbb{R}$.
d. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a est inversible, et calculer M_a^{-1}.
Réponse :

a. Pour $a = 0$, on obtient la matrice identité : $M_0 = I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b & b^2/2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+b & \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a : $\frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} M_a M_b &= \begin{pmatrix} 1 & a+b & (a+b)^2/2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M_{ab} \end{aligned}$$

c. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$: On a :

$$M_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4\frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 9\frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots$$

Ces résultats nous mènent à faire l'hypothèse suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M_a^n &= \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{(na)^2}{2} \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M_{na} \end{aligned}$$

Montrons que cela est vérifié. Par récurrence sur n :
Pour $n = 1$, on a bien le résultat.
Supposons que le résultat est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il est vérifié pour $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} M_a^{n+1} &= M_a \times M_a^n \\ &= M_a \times M_{na} \\ &= M_{a+na} \\ &= M_{(n+1)a} \end{aligned}$$

Où on a utilisé l'hyposthèse de récurrence dans la deuxième ligne et le résultat de la question 2 dans la troisième.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$M_a^n = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{(na)^2}{2} \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour prouver que M_a est inversible et calculer son inverse, il suffit de trouver une matrice $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_a \times Q = I$$

Le résultat de la question 2 stipule que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$M_a \times M_b = M_{a+b}$$

Comme on a : $M_0 = I$, on déduit que pour $b = -a$, on a :

$$M_a \times M_{-a} = I$$

Ainsi, M_a est inversible et son inverse et donné par :

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2/2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut répondre à la question 4 en utilisant les résultats sur les systèmes linéaires (Proposition 3.4.5 page 60 du poly) :
Soient : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour montrer que M_a est inversible, on considère le système suivant d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$M_a \times X = B$$

Ce système est de rang 3, donc il admet une unique solution. D'où l'existance de l'inverse de M_a.
Pour trouver l'inverse de M_a on suit les opérations de l'exemple 3.4.6 page 60. On trouve que :

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2/2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.11.— * Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer le rang de A en fonction des valeurs de a avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Réponse :
Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice. On note $C_1, C_2, ..., C_p$ les vecteurs colonnes de A. On appelle rang de A et on note $\text{rang}(A)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(C_1, ..., C_p)$ de $\mathbb{R}^n$. (Définition 4.3.13 page 74).

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Pour trouver le rang de A, il suffit de trouver la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^3$) $E = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$, où $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$.
Il s'agit donc de compter les inconnues principales du système homogène correspondant à l'équation : $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0$, dont la matrice associée est A.

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_3 + a\lambda_4 & = 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_4 & = 0 \\ a\lambda_2 + \lambda_3 + a\lambda_4 & = 0 \end{cases}$$

Un système échelonné équivalent s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_3 + a\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_2 - a^2\lambda_3 + (a - a^2)\lambda_4 & = 0 \\ (1 + a^3)\lambda_3 + (a - a^2 + a^3)\lambda_4 & = 0 \end{cases}$$

La troisième équation s'écrit :

$$(1 - a + a^2)((1 + a)\lambda_3 + a\lambda_4) = 0$$

Or on a : $\forall a \in \mathbb{R} : 1 - a + a^2 \neq 0$.
On obtient donc un système échelonné avec 3 variables principales. Donc le rang de A est 3.

Exercice 4.12.— * Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse. Calculer A^n pour tout entier n.
Réponse : On utilise la méthode du pivot de Gauss pour calculer l'inverse de A, si c'est possible :

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}L_1&\leftarrow&L_2\\L_2&\leftarrow&L_1\\L_3&\leftarrow&L_3-L_2\\L_4&\leftarrow&L_4-L_2\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}\\\\L_3&\leftarrow&L_3-L_2\\L_4&\leftarrow&L_4-L_2\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&-1\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\-1&-1&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}\\\\L_3&\leftarrow&L_4\\L_4&\leftarrow&L_3-2L_4\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&3\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\-1&-1&0&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}\\\\L_3&\leftarrow&-L_3\\L_4&\leftarrow&\frac{1}{3}L_4\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3&0&0\\3&0&0&0\\3&3&0&-3\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}L_1&\leftarrow&L_1-L_4\\L_2&\leftarrow&L_2-L_4\\L_3&\leftarrow&L_3-2L_4\\\\\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-1&2\\2&-1&-1&2\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{lcl}L_1&\leftarrow&L_1-L_3\\L_2&\leftarrow&L_2-L_3\\\\\\\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\right.$$

On a donc trouvé que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
On cherche maintenant à calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On remarque que le résultat précédent s'écrit aussi $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$, ou encore, après multiplication par A :

$$A^2 = 2A + 3I \quad (*)$$

Comme dans l'exercice 4.5, cette formule permet d'écrire, pour tout entier n, A^n sous la forme $a_n A + b_n I$, où les réels a_n et b_n sont déterminés de manière unique. Plus précisément, on va montrer que

$$A^n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} A + \frac{3^n + 3(-1)^n}{4} I \quad (**)$$

Pour trouver la valeur de ces coefficients, on pourrait utiliser la méthode de *diagonalisation* de matrices (qui sera vue plus tard), ou encore s'inspirer de l'exercice 2.18 (les raisons 3 et -1 qui apparaissent sont les solutions de l'équation $x^2 = 2x + 3$ liée à la formule (*)) ; on va se contenter ici de vérifier le résultat par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, $\frac{3^0 - (-1)^0}{4} A + \frac{3^0 + 3(-1)^0}{4} I = I = A^0$.
Pour $n = 1$, $\frac{3^1 - (-1)^1}{4} A + \frac{3^1 + 3(-1)^1}{4} I = A = A^1$.
Pour n quelconque, en multipliant la formule (*) par A^n, on trouve la relation de récurrence $A^{n+2} = 2A^{n+1} + 3A^n$. Et donc, si on suppose la formule (**) vraie pour A^n et A^{n+1},

$$\begin{aligned} A^{n+2} &= 2A^{n+1} + 3A^n \\ &= 2\frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1}}{4} A + 2\frac{3^{n+1} + 3(-1)^{n+1}}{4} I + 3\frac{3^n - (-1)^n}{4} A + 3\frac{3^n + 3(-1)^n}{4} I \\ &= \frac{6 \times 3^n + 2(-1)^n + 3 \times 3^n - 3(-1)^n}{4} A + \frac{6 \times 3^n - 6(-1)^n + 3 \times 3^n + 9(-1)^n}{4} I \\ &= \frac{3^{n+2} - (-1)^{n+2}}{4} A + \frac{3^{n+2} + 3(-1)^{n+2}}{4} I \end{aligned}$$

Exercice 4.13.— ***** Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}$. Démontrer que A est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$. Dans ce cas calculer A^{100}.
Réponse : On commence par deux remarques.
Premièrement, si A est semblable à une matrice D et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A - \lambda I$ est semblable

à $D - \lambda I$. En effet, si on écrit $D = P \times A \times P^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P, alors on calcule

$$P \times (A - \lambda I) \times P^{-1} = P \times (A \times P^{-1} - \lambda P^{-1}) = P \times A \times P^{-1} - P \times (\lambda P^{-1}) = D - \lambda I.$$

Deuxièmement, si D est une matrice diagonale, alors son rang est égal au nombre de coefficients non nuls sur la diagonale. En effet, une simple permutation des lignes permet d'obtenir une matrice échelonnée, et il suffit de compter le nombre de lignes non nulles.

a) Montrons tout d'abord que si A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, alors $c \neq 1$ et $a = 0$.

Supposons par l'absurde que $c = 1$. Supposons aussi qu'un des λ_i soit différent de 1. Par la première remarque, $A - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda_i & b \\ 0 & 0 & 1-\lambda_i \end{pmatrix}$ est semblable à $D - I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_i \end{pmatrix}$. Comme ces deux matrices représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, elles ont le même rang, ce qui est faux puisque la première est de rang 3 (c'est une matrice échelonnée avec tous les coefficients de la diagonale non nuls) et la deuxième de rang < 3 (puisqu'un des coefficients de la diagonale est nul). Il faut donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ce qui donne $D = I$, et donc $A = P^{-1} \times D \times P = P^{-1} \times P = I$, ce qui est faux (à cause du coefficient en première ligne, troisième colonne). On a donc montré $c \neq 1$.

Ceci étant acquis, supposons par l'absurde que $a \neq 0$. En utilisant que $c - 1 \neq 0$, on échelonne $A - I$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 - \frac{b}{c-1} L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & c-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le rang de $A - I$ vaut 2, donc celui de $D - I$ aussi, ce qui signifie qu'exactement un des coefficients λ_i vaut 1. On raisonne de même pour $A - cI = \begin{pmatrix} 1-c & a & 1 \\ 0 & 1-c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2 car $1 - c \neq 0$, donc $D - cI$ aussi, donc exactement un des coefficients λ_i est c. Pour le dernier coefficient λ_i dont on ne connait pas la valeur, λ_i est différent de 1 et c, le rang de $D - \lambda_i I$ vaut 2, alors que celui de $A - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda_i & b \\ 0 & 0 & c-\lambda_i \end{pmatrix}$ est 3 : contradiction. Donc $a \neq 0$.

b) Montrons maintenant la réciproque. Supposons que $a = 0$ et $c \neq 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, cela signifie que

$f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = (1, b, c)$. Cherchons un vecteur non nul $w = (x, y, z)$ tel que $f(w) = cw$. Comme $f(w) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = (x + z, y + bz, cz)$, cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x + z = cx \\ y + bz = cy \\ cz = cz \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{z}{c-1} \\ y = \frac{bz}{c-1} \end{cases}$$

En prenant $z = c - 1 \neq 0$, on peut donc choisir $w = (1, b, c - 1)$ comme solution non nulle. On constate que $B = (e_1, e_2, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$ est de rang 3. Comme $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(w) = cw$, la matrice de f dans la base B est la $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, et donc A est semblable à la matrice diagonale D.

c) Calculons enfin A^{100} en utilisant ce qui précède. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base B. On calcule facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c-1} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c-1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c-1} \end{pmatrix}$.

Comme $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base B, et A la matrice de f dans la base canonique, la formule de changement de base nous dit que $A = P \times D \times P^{-1}$. En écrivant

$$A^{100} = (P \times D \times P^{-1})^{100} = \underbrace{(P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) \times \ldots \times (P \times D \times P^{-1})}_{\text{100 fois}}$$

on voit que les produits intermédiaires $P^{-1} \times P$ se simplifient pour donner I, et il reste ainsi $A^{100} = P \times D^{100} \times P^{-1}$. On vérifie facilement par le calcul que le produit de deux matrices diagonales est donné par la formule

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de montrer par récurrence sur n que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $D^{100} = \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & c^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^{100} \end{pmatrix}$, et on en déduit que

$$A^{100} = P \times D^{100} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c^{100}-1}{c-1} \\ 0 & 1 & b\frac{c^{100}-1}{c-1} \\ 0 & 0 & c^{100} \end{pmatrix}$$