Université Paris Sud — **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2018-19 — **Algèbre linéaire**

Feuille d'exercices 4

Matrices

Exercice 4.1.— Relations entre les (vecteurs-)colonnes et solutions d'un système. On considère le système linéaire

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

aux inconnues x, y, z, t. On note A la matrice correspondant au système (S). On note $E \subset \mathbb{R}^4$ l'espace des solutions de (S).

1. Expliciter la matrice A.

2. On note $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de A, de sorte que le système (S) traduit l'égalité $x\,C_1 + y\,C_2 + z\,C_3 + t\,C_4 = 0$. Calculer : le rang de (S), une relation de dépendance linéaire entre C_1, C_2 et C_3, une autre entre C_1, C_2 et C_4, et en déduire une base (v_3, v_4) de E.

Exercice 4.2.— Sous-espaces de matrices. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de la forme $S(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (avec a, b deux réels quelconques). Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de la forme $T(c,d) = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ (avec c, d deux réels quelconques)

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des plans vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3.— Produits de matrices. Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB et le produit BA, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4.— **Produits de matrices.** Calculer les produits AE_1, E_1A, AE_2, E_2A, AP et PA avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que remarquez vous ?

Exercice 4.5.— **Puissances de matrices** 2×2. Dans la suite on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \geq 1$ un entier on considère le produit de la matrice $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ termes}}$ que l'on note A^n. On pose aussi $A^0 = I_2$où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité 2×2). Ainsi l'on a $A^{n+1} = A.A^n$ pour $n \geq 0$.

1. Vérifier la relation suivante : $A^2 = 3A - I_2$. Exprimer de même A^3 en fonction de A et I_2. En déduire que pour tout entier naturel n , A^n est combinaison linéaire des matrices A et I_2.

2. Prouver que la famille (A, I_2) est une famille libre dans l'espace vectoriel $M_2(R)$.

3. a. Déduire de ce qui précède que pour tout entier $n \geq 2$ il existe un unique couple d'entiers relatifs (a_n, b_n) tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ et donner une formule de récurrence permettant de calculer (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n). Que valent (a_0, b_0) et (a_1, b_1) ?

b. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ on $X_{n+1} = BX_n$.

c. Montrer que B^2 s'exprime en fonction de B et I_2 comme A^2 s'exprime en fonction de A et I_2.

Exercice 4.6.— **Matrices représentant les complexes.** On reprend les notations de l'exercice 4.2.

1. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}$ est encore dans $\mathcal{S}$. Calculer en particulier $S(a, b)S(a, -b)$. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{S}$, mais que les produits $S(a, b)T(c, d)$ et $T(c, d)S(a, b)$ sont dans $\mathcal{T}$.

2. Montrer que les calculs de sommes et de produits avec les nombres complexes $a + ib$ correspondent exactement aux calculs de sommes et de produits avec les matrices $S(a, b)$. A quoi correspond le passage de $S(a, b)$ à $S(a, -b)$ du point de vue des nombres complexes ?

3. On introduit les matrices $R := S(0, 1), \Sigma := T(1, 0), \Sigma' := T(0, 1)$. D'autre part un point M du plan est identifié à la matrice colonne $X_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ de ses coordonnées.

a. On définit une transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $\sigma(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est ΣX_M. Décrire géométriquement la transformation $\sigma : M \mapsto \sigma(M)$.

b. On définit une autre transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $\sigma'(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est $\Sigma' X_M$. Décrire géométriquement la transformation $\sigma' : M \mapsto \sigma'(M)$.

c. On définit une dernière transformation géométrique de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : pour $M \in \mathcal{P}$ on note $r(M)$ le point de $\mathcal{P}$ dont la colonne des coordonnées est RX_M. Décrire géométriquement la transformation $r : M \mapsto r(M)$. Montrer que r est la transformation composée $\sigma' \circ \sigma$.

Exercice 4.7.— Matrices magiques réelles. On travaille dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées 3×3. Pour alléger on note les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *magique* si la somme des coefficients de A dans une ligne ou dans une colonne est un nombre indépendant de la ligne ou la colonne. Ce nombre, noté $s(A)$, est appelé la *somme* de la matrice magique A. On note E l'ensemble de toutes les matrices magiques. On aimerait pouvoir décrire toutes les matrices magiques.

1. Vérifier que la matrice identité I_3 est magique de somme 1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que le produit de deux matrices magiques A et A' est encore magique, et calculer $s(AA')$ en fonction de $s(A)$ et $s(A')$.

3. Soit F l'ensemble des matrices magiques de somme nulle.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que la droite D engendrée par I_3 est un supplémentaire de F dans E.

b. Donner un système d'équations cartésiennes et une base de F. Donner une base de E.

4. Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *supermagique* si elle est magique, et que de plus la somme des coefficients diagonaux et la somme des coefficients anti-diagonaux vaut $s(A)$.

a. Montrer que l'ensemble des matrices supermagiques de somme nulle est un plan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'espace G de toutes les matrices supermagiques est un sous-espace vectoriel contenant la matrice J_3 dont tous les coefficients valent 1, et en donner une base.

c. Expliciter une matrice supermagique $A \in G$ dont l'ensemble des coefficients est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (on pourra commencer par calculer la somme, puis en déduire le coefficient b_2, et enfin constater que deux coefficients symétriques par rapport à b_2 sont de somme 10).

Exercice 4.8.— Inverse d'une matrice.

1. Calculer l'inverse de la matrice A et dire pour quelles valeurs du paramètre m la matrice B est inversible et calculer son inverse pour ces valeurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9.— Puissances et inverse d'une matrice

1. Calculer E^3 et dire si la matrice E est-elle inversible, où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I = 0$ où I est la matrice identité et 0 la matrice nulle.

c. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4.10.— * Soit un paramètre $a \in \mathbb{R}$ et M_a la matrice suivante :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer M_0.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ calculer le produit $M_a\,M_b$ et en déduire que :

$$M_a\,M_b = M_{a+b}.$$

c. Calculer M_a^n pour tout entier n et tout $a \in \mathbb{R}$.

d. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a est inversible, et calculer M_a^{-1}.

Exercice 4.11.— * Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer le rang de A en fonction des valeurs de a avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12.— * Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse. Calculer A^n pour tout entier n.

Exercice 4.13.— * Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}$. Démontrer que A est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$. Dans ce cas calculer A^{100}.