Université Paris Sud | **Math 103**
L1 – 2ème semestre 2019-20 | **Algèbre linéaire**

Corrigé de la feuille 3

Dimensions etc...

Avertissement On s'apercevra, à la lecture de ce corrigé, que, dans la plupart des cas, on a commencé à échelonner un système avec second membre dès la première question de l'exercice, même lorsque manifestement ce n'était pas indispensable pour répondre à cette question en particulier. Néanmoins, dans bien des cas ce calcul s'avère utile pour les questions ultérieures. Procéder ainsi évite de devoir échelonner une deuxième fois le même système.

Exercice 3.1.— Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 3, 5, 7)$ et $v_4 = (0, 2, 3, a)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
1. Pour quelles valeurs de a la famille $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une base ?
Réponse : La famille $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base, si, par définition, elle est libre et génératrice, c'est-à-dire si

— le seule quadruplet (a_1, a_2, a_3, a_4) de nombres réels solution de l'équation

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \ = \ 0$$

est $(0, 0, 0, 0)$;

— pour tout $w \in \mathbb{R}^4$, il existe un quadruplet de nombres réels (a_1, a_2, a_3, a_4) tel que

$$(*) \ : \ w \ = \ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \ .$$

Ces deux conditions peuvent également se formuler en disant que le quadruplet solution de l'équation $(*)$ ci-dessus existe et est unique.
Par ailleurs on peut également justifier que S est une base en constatant que S contient 4 éléments et donc que :

— si c'est une famille libre elle est libre maximale et c'est donc une base ;

— si c'est une famille génératrice elle est donc minimale et c'est donc une base.

Pour $w := (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, l'équation d'inconnues a_1, a_2, a_3, a_4 réels

$$a_4v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \ = \ w$$

équivaut au système :

$$\Sigma \quad : \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & x \\ -a_1 & + & & & 3a_3 & + & 2a_4 & = & y \\ & & a_2 & + & 5a_3 & + & 3a_4 & = & z \\ 2a_1 & + & 2a_2 & + & 7a_3 & + & aa_4 & = & t \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & x \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & x+y \\ & & a_2 & + & 5a_3 & + & 3a_4 & = & z \\ & & & & 5a_3 & + & aa_4 & = & t-2x \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & x \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & x+y \\ & & & & a_3 & + & a_4 & = & z-x-y \\ & & & & 5a_3 & + & aa_4 & = & t-2x \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & x \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & x+y \\ & & & & a_3 & + & a_4 & = & z-x-y \\ & & & & & & (a-5)a_4 & = & 3x+5y-z+t \end{array}\right\} .$$

Ce système est compatible, sans aucune condition sur x, y, z, t si et seulement si $a \neq 5$. On en déduit que S est une base si et seulement si $a \neq 5$.

2. Pour les valeurs de a où S est liée, donner une elation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.

Réponse : On a vu ci-dessus que S est lié si et seulement si $a = 5$, et dans ce cas le système Σ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & x \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & x+y \\ & & & & a_3 & + & a_4 & = & z-x-y \\ & & & & & & 0 & = & 3x+5y-z+t \end{array}\right\} .$$

Trouver une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de S équivaut exactement à trouver une solution différente de $(0,0,0,0)$ à l'équation $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$ ou encore au système Σ. On constate que $(-1, 2, -1, 1)$ est une telle solution *i.e.*

$$(**) \ : \ -v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 = 0 .$$

3. Quelle est la dimension de $E = \mathrm{Vect}(S)$ selon les valeurs de a ?

Réponse : Si S est libre *i.e.* si $a \neq 5$,, par définition même de E S est une base de E si bien que E est de dimension 4.

Si $a = 5$, en considérant l'équation de dépendance linéaire $(**)$ ci-dessus on constate que v_4 peut s'écrire en fonction de v_1, v_2 et v_3 si bien que (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice

de E. En considérant de plus le système Σ (et en oubliant sa dernière colonne) on constate que (v_1, v_2, v_3) est également une famille libre et partant une base de E qui est alors de dimension 3.
Soit $k \in \mathbb{R}$, et $e = (4, k, 1, 3)$.

4. Pour les valeurs de a où S est liée, quelles sont les valeurs de k telles que $e \in E$? Pour ces valeurs de k et de a, exprimer e en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4.
Réponse : Dans le cas où S est lié, *i.e.* $a = 5$, on constate que le système Σ est compatible si et seulement si $3x + 5y - z + t = 0$. Ceci équivaut au fait, que pour un vecteur $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, il existe a_1, a_2, a_3, a_4 réels tels que

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

si et seulement si $3x+5y-z+t = 0$ ou encore $w \in E$ si et seulement si $3x+5y-z+t = 0$.
Ainsi $e \in E$ si et seulement si

$$3 * 4 + 5 * k - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 5 * k + 14 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{14}{5} .$$

Puisque $e \in E$ e est a priori combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 et v_4. Cependant puisque nous somme dans le cas où $a = 5$, v_4 est combinaison linéair de v_1, v_2 et v_3 ; si bien qu'on peut exprimer e comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3. Ceci revient à résoudre le système Σ avec $x = 4$, $y = k$, $z = 1$ et $t = 3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & 4 \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & 4+k \\ & & & & a_3 & + & a_4 & = & -3-k \\ & & & & & & 0 & = & 3*4+5*k-1+3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_3 & = & -3-k \\ a_2 & = & 5k+16 \\ a_1 & = & 4-a_2-a_3 \\ & = & 4-5k-16+k+3 \\ & = & -4k-9 \end{array}\right. .$$

5. Quand a-t-on $e \in E$ pour les valeurs de a où S est libre ? Donner les coordonnées de e dans S.
Réponse : Lorsque S est libre c'est une base de $\mathbb{R}^4$, si bien que $E = \mathbb{R}^4$ et que $e \in E$ inconditionnellement.
Trouver les coordonnées de e dans S signifie déterminer a_1, a_2, a_3 et a_4 réels tels que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = e$$

i.e. résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & & = & 4 \\ & & a_2 & + & 4a_3 & + & 2a_4 & = & 4+k \\ & & & & a_3 & + & a_4 & = & -3-k \\ & & & & & & (a-5)*a_4 & = & 3*4+5*k-1+3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_4 & = & \dfrac{5k+14}{a-5} \\ a_3 & = & -3-k-a_4 \\ & = & -\dfrac{(a-5)(k+3)+5k+14}{a-5} \\ & = & -\dfrac{ak+3a-1}{a-5} \\ a_2 & = & 4+k-4a_3-2a_4 \\ & = & \dfrac{1}{a-5}\big(((a-5)(k+4)+4*(ak+3a-1)-2*(5k+14)\big) \\ & = & \dfrac{5ak+16a-15k-48}{a-5} \end{array}\right\}.$$

Exercice 3.2.— **Base incomplète et système d'équations cartésiennes.**
Soit $u_1 = (1,1,1,2), u_2 = (0,1,2,-1), u_3 = (1,3,5,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et soit $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

1.

— Donner une base $\mathcal{B}$ de E et la dimension de E.
Réponse : Pour tout $v := (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $v \in E$ si et seulement si il existe a_1, a_2 et a_3 réels tels que

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \ ;$$

si et seulement si le système Σ suivant d'inconnues a_1, a_2, a_3 est compatible :

$$\Sigma \quad : \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & + & a_3 & = & x \\ a_1 & + & a_2 & + & 3a_3 & = & y \\ a_1 & + & 2a_2 & + & 5a_3 & = & z \\ 2a_1 & - & a_2 & & & = & t \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & + & a_3 & = & x \\ & & a_2 & + & 2a_3 & = & y-x \\ & & 2a_2 & + & 4a_3 & = & z-x \\ & - & a_2 & - & 2a_3 & = & t-2x \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & & + & a_3 & = & x \\ & a_2 & + & 2a_3 & = & y-x \\ & & & 0 & = & x-2y+z \\ & & & 0 & = & -3x+y+t \end{array}\right\}$$

Il s'ensuit que l'on peut trouver une combinaison linéaire non nulle

$$u_1 + 2u_2 - u_3 \ = \ 0 \ .$$

Le sous-espace E est donc engendré par la famille (u_1, u_2). La Le système Σ ci-dessus fait clairement apparaître que cette famille est libre et donc une base de E. Ainsi E est de dimension 2.

— Si $u \notin E$ est-il possible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ dont le troisième vecteur est u ?

Réponse : Soit $u \ \notin \ E$. La famille (u_1, u_2, u) est alors libre. En effet pour tous réels a_1, a_2, a, si $(*) \ : \ a_1u_1 + a_2u_2 + au \ = \ 0$, et $a \ \neq 0$, on a

$$u \ = \ -\frac{a_1}{a}u_1 - \frac{a_2}{a}u_2$$

ce qui entraîne $u \in E$. Par contraposée, on a donc nécessairement $a \ = \ 0$, si bien que l'équation $(*)$ équivaut à $a_1u_1 + a_2u_2 \ = \ 0$ qui entraîne que

$$a_1 \ = \ a_2 \ = \ 0 \ .$$

La famille (u_1, u_2, u) étant libre, elle peut, en vertu du théorème de la base incomplète, se compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

— Donner un exemple de vecteurs u, v non dans E, tels que (u, v) est libre mais $\mathcal{B} \cup (u, v)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

Réponse : Considérons le vecteurs $e_1 \ := \ (1, 0, 0, 0)$. Il n'appartient pas à E ; puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation $x - 2y + t \ = \ 0$. Soient

$$u \ := \ u_1 + u_2 + e_1 \text{ et } v \ = \ u_1 + u_2 - e_1 \ .$$

— $u \ \in \ E$ ou $v \ \in \ E$, entraîne $e_1 \ \in \ E$, si bien que

$$u \ \notin E \text{ et } v \ \notin \ E \ .$$

— Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} au + bv \ &= \ 0 \\ \Leftrightarrow \ \ (a + b)u_1 + (a + b)u_2 + (a - b)e_1 \ &= \ 0 \ . \end{aligned}$$

Or on a vu ci-dessus que, dès que $e_1 \ \notin \ E$, (u_1, u_2, e_1) est une fammille libre. L'égalité ci-dessus entraîne $a + b \ = \ 0$ et $a - b \ = \ 0$, ce qui entraîne finalement

$$a \ = \ b \ = \ 0,$$

c'est-à-dire que la famille (u, v) est libre.

— Enfin par construction

$$u + v - 2u_1 - 2u_2 \ = \ 0$$

si bien que la famille (u_1, u_2, u, v) est liée et ne peut donc pas être une base de $\mathbb{R}^4$.

On peut noter que dans la construction ci-dessus, même si on a explicitement donné le vecteur e_1 (pour rassurer le lecteur) le seul fait que $e_1 \notin E$ suffit à garantir que les vecteurs

$$u \;=\; u_1 + u_2 + e_1 \text{ et } v \;=\; u_1 + u_2 - e_1$$

répondent à la question. Autrement dit on peut prendre e_1 n'importe quel vecteur n'appartenant pas à E.

2.

— En utilisant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Réponse : Notons $e_3 := (0,0,1,0)$ et $e_4 := (0,0,0,1)$. Alors

$$y_1u_1 + y_2u_2 + y_3e_3 + y_4e_4 \;=\; (x,y,z,t)$$

équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} a_1 & & & & & & & = & x \\ a_1 & + & a_2 & & & & & = & y \\ a_1 & + & 2a_2 & + & a_3 & & & = & z \\ 2a_1 & - & a_2 & & & + & a_4 & = & t \end{array}\right\}$$

qui est échyelonné et réduit ; ce qui assure que (u_1, u_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

— Si on note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$, montrer que $u \in E \iff y_3 = y_4 = 0$.

Réponse : Puisque $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ $u \in E$ si et seulement si il existe y_1 et y_2 réels tels que

$$u \;=\; y_1u_1 + y_2u_2 \ .$$

Par unicité de l'écriture dans la base (u_1, u_2, e_3, d_4) ceci équivaut à $y_3 = y_4 = 0$.

3. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ (on pourra commencer par les quatre vecteurs u de la base canonique de $\mathbb{R}^4$).

Réponse :

$$\begin{aligned} u &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= y_1u_1 + y_2u_2 + y_3e_3 + y_4e_4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccccc} y_1 & & & & & & & = & x_1 \\ y_1 & + & y_2 & & & & & = & x_2 \\ y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & & & = & x_3 \\ 2y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & = & x_4 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y_1 & = & x_1 \\ y_2 & = & x_2 - y_1 \\ & = & -x_1 + x_2 \\ y_3 & = & x_3 - y_1 - 2y_2 \\ & = & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ & = & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_4 & = & x_4 + 2y_1 - y_2 \\ & = & x_4 + 2x_1 - x_2 + x_1 \\ & = & 3x_1 - x_2 + x_4 \end{array}\right\} .$$

Exercice 3.3.— Systèmes d'équations cartésiennes

1. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $(1,2,-1)$.

Réponse : Pour tout $u := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathrm{Vect}(1,2-1)$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & -t \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & ty & = & 2x \\ z & = & -x & & \end{array}\right\} \end{aligned}$$

si bien que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-2y & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{array}\right\}$$

est un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Vect}(1,2,-1)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $v = (1,2,-3)$ et $w = (1,-1,1)$. Montrer que (v,w) est libre et donner les équations cartésiennes de $\mathrm{Vect}(v,w)$.

Réponse : Pour tout $u := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u & \in \mathrm{Vect}(v,w) \\ \Leftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} u & = av+bw \end{aligned}$$

ce qui équivaut au fait que le système σ suivant un couple (a,b) solution ou encore, de manière équivalente, qu'il est compatible :

$$\begin{aligned} \Sigma \quad : \quad & \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & x \\ -a & + & 2b & = & y \\ a & - & 3b & = & z \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{lcccccccc} a & + & b & = & x & & & & \\ & & 3b & = & x+y & -4b & = & -x+z \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{lcccc} a & + & b & = & x \\ & & 3b & = & x+y \\ & & 0 & = & 4*(x+y)+3(-x+z) \\ & = & x+4y+3z & & \end{array}\right\} . \end{aligned}$$

Il résulte des deux premières équation du système Σ que la seule solution de $av + bw = 0$ est $(0,0)$; ce qui assure que (v,w) est une famille libre ; partant une base de $\mathrm{Vect}(v,w)$. Le système est copatible si et seulement si $x + 4y + 3z = 0$; c'est-à-dire que

$$u := (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(v,w) \Leftrightarrow x + 4y + 3z = 0 .$$

Exercice 3.4.— Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^4$.
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, -2, 1, -2), u_2 = (1, 1, 2, 2), u_3 = (2, -1, 3, 0), u_4 = (0, 3, 1, 4).$$

1. Démontrer que la suite $S = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est liée, et donner une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.
Réponse : Pour tout $v := (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times R \times \mathbb{R} v = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4,$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & & & = & x \\ -2a & + & b & - & c & + & 3d & = & y \\ a & + & 2b & + & 3c & + & d & = & z \\ -2a & + & 2b & & & + & 4d & = & t \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & & & = & x \\ & & 3b & + & c & + & 3d & = & 2x+y \\ & & b & + & 2c & + & d & = & -x+z \\ & + & 4b & + & 2c & + & 4d & = & 2x+t \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & & & = & x \\ & & b & + & 2c & + & d & = & -x+z \\ & & & & -5c & & & = & 2x+y-3(-x+z) \\ & & & & & & & = & 5x+y-3z \\ & & & & -6c & & & = & 2x+t-4(-x+z) \\ & & & & & & & = & 6x-4z+t \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & & & = & x \\ & & b & + & 2c & + & d & = & -x+z \\ & & & & -5c & & & = & 5x+y-3z \\ & & & & 0 & & & = & 5(6x-4z+t)-6(5x+y-3z) \\ & & & & & & & = & -6y-2z+5t \end{array}\right\}.$$

On déduit du système ci-dessus que

$$(*) \ : \ u_1 - u_2 + u_4 \ = \ 0 \ .$$

2. Donner une base B du sous-espace $E = \mathrm{Vect}(U)$, et en donner un système d'équations cartésiennes.
Réponse : Il résulte de l'égalité $(*)$ ci-dessus que $u_4 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ si bien que

$$\mathrm{Vect}(U) \ = \ \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \ .$$

De plus il résulte du système échelonné ci-dessus que la seule solution de $au_1+bu_2+cu_3 = 0$ est $a = b = ¸ = 0$; si bien que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathrm{Vect}(U)$ et donc une base.
La résolution du système nous donne une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(U)$:

$$(**) \ : \ -6y - 2z + 5t \ .$$

3. Compléter B en une base de $\mathbb{R}^4$.
Réponse : Pour n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{R}^4$, si $v \notin \mathrm{Vect}(U)$, (u_1, u_2, u_3, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. C'est un argument qu'on a déjà donné mais qu'on peut redonner ici : En effet pour tous a, b, c et d réels si $au_1 + bu_2 + cu_3 + dv = 0$, et $d \neq 0$,

$$v = -\frac{a}{d}u_1 - \frac{b}{d}u_2 - \frac{c}{d}u_3 \in \mathrm{Vect}(U) \ .$$

On a donc nécessairement $d = 0$, ce qui entraîne $a = b = c = 0$ puisque (u_1, u_2, u_3) est libre.
Ainsi pour n'importe quel vecteur v n'apartenant pas à $\mathrm{Vect}(U)$ (u_1, u_2, u_3, v) est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^4$? donc une base.
L'équation cartésienne $(**)$ de $\mathrm{Vect}(U)$ donne un critère permettant de trouver facilement des vecteurs n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(U)$; ainsi en va-t-il par exemple de

$$e_2 = (0, 1, 0, 0) \ , \ e_3 = (0, 0, 1, 0) \ , \ e_4 = (0, 0, 0, 1) \ \ldots \ \ldots$$

Exercice 3.5.— **Argument de dimension.** Soient E, F, G, H des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $E \subset F \subset G \subset H$, et de plus $E \neq \{0\}, H \neq \mathbb{R}^4$. Montrer que deux des sous-espaces sont égaux.
Réponse : On rappelle que, pour deux sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^4$, (ou plus généralement de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$,)

$$V \subset W \Rightarrow \dim(V) \leq \dim(W)$$

avec égalité si et seulement si $V = W$.
Ainsi la suite d'inclusion

$$E \subset F \subset G \subset H \text{ et } E \neq \{0\} \ , \ H \neq \mathbb{R}^4$$

entraîne

$$0 < \dim(E) \leq \dim(F) \leq \dim(G) \leq \dim(H) < 4 \ .$$

Or les dimensions étant des nombres entiers, $\dim(V) < \dim(W) \Rightarrow \dim(V) \leq \dim(W)+1$. Deux des dimensions $\dim(E)$, $\dim(F)$, $\dim(G)$ et $\dim(H)$ sont donc égales ce qui entraîne que deux des sous-espaces E, F, G, et H sont égaux.

Exercice 3.6.— **Base d'une intersection et d'une somme par l'algorithme du pivot.** On considère les deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,1,1),(5,-1,6,1)) \text{ et } E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,2,0),(1,2,2,0),(3,1,6,0)).$$

— Donner une base de $E_1 + E_2$,
Réponse : Notons

$$\begin{array}{rcl} u_1 & := & (1,0,1,1), \\ u_2 & := & (5,-1,6,1), \\ u_3 & := & (1,1,2,0), \\ u_4 & := & (1,2,2,0), \\ u_5 & := & (3,1,6,0)) \ . \end{array}$$

On a alors

$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) \ ;$$

si bien que $v := (x,y,z,t) \in E_1 + E_2$ si et seulement si

$$\exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \text{ tel que } v = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 + eu_5$$

ce qui équivaut au fait que le système suivant est compatible :

$$\Sigma \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a & + & 5b & + & c & + & d & + & 3e & = & x \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & y \\ a & + & 6b & + & 2c & + & 2d & + & 6e & = & z \\ a & + & b & & & & & & & = & t \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & t \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & y \\ & & 5b & + & 2c & + & 2d & + & 6e & = & z-t \\ & & 4b & + & c & + & d & + & 3e & = & x-t \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & t \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & y \\ & & & & 7c & + & 12d & + & 11e & = & 5y+z-t \\ & & & & 5c & + & 9d & + & 7e & = & x+4y-t \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & t \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & y \\ & & & & 7c & + & 12d & + & 11e & = & 5y+z-t \\ & & & & & & 3d & + & -6e & = & 7(x+4y-t)-5(5y+z-t) \\ & & & & & & & & & = & 7x+3y-5z-2t \end{array} \right\} .$$

Il en résulte que (u_1,u_2,u_3,u_4) ainsi que (u_1,u_2,u_3,u_5) sont des familles libre de $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^4$. On a donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$, dont les deux familles ci-dessus sont des bases.

— puis une base de $E_1 \cap E_2$

Réponse : Un vecteur v appartient à $E_1 \ \cap \ E_2$ si et seulement si il existe $(a,b,c,d,e) \ \in \ \mathbb{R}^5$, tel que

$$v \ = \ au_1 + bu_2 \ = \ cu_3 + du_4 + eu_5$$

ce qui revient (quitte à changer un peu les notations $c \Rightarrow -c$, $d \Rightarrow -d$, $e \Rightarrow -e$,) à résoudre le système déjà écrit ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & 0 \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & 0 \\ & & & & 7c & + & 12d & + & 11e & = & 0 \\ & & & & & & 3d & - & 6e & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & 0 \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & 0 \\ & & & & 7c & + & 12d & + & 11e & = & 0 \\ & & & & & & & & d & = & 2e \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a & + & b & & & & & & & = & 0 \\ & - & b & + & c & + & 2d & + & e & = & 0 \\ & & & & & & & & 7c & = & -12d - 11e \\ & & & & & & & & & = & -35e \\ & & & & & & & & d & = & 2e \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} a & + & b & & = & 0 \\ & & & b & = & c + 2d + e \\ & & & & = & 0 \\ & & & c & = & -5e \\ & & & d & = & 2e \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & -5e \\ d & = & 2e \end{array} \right\} .$$

On en déduit que

$$v \ \in \ E_1 \ \cap \ E_2 \ \Leftrightarrow \ v \ = \ 0 \ .$$

On peut déduire de la résolution du système ci-dessus (même si cela n'est pas explicitement demandé, que

$$5u_3 - 2u_4 - u_5 \ = \ 0 \ .$$

On pouvait dès avant être certain que la famille (u_3, u_4, u_5) n'était pas libre puisque

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) \ = \ \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

et qu'il est manifeste que $\dim(E_1) \ = \ 2$.

— et enfin dire si la somme de E_1 et E_2 est directe.
Réponse : On a montré ci-dessus que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ce qui assure que

$$E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 .$$

Exercice 3.7.— Somme, intersection. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les deux sous-espaces vectoriels $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$.
1. Déterminer la dimension et une base de E et F.
Réponse :

Dimension et base de E Le système formé de la seule équation $y + z + t = 0$ a une inconnue principal et trois inconues secondaires si bien que E et de dimension 3. On a :

$$\begin{array}{rrcl} & (x,y,z,t) & \in & E \\ \Leftrightarrow & y+z+t & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t & = & -y-z \\ \Leftrightarrow & (x,y,z,t) & = & (x,y,z,-y-z) \\ & & = & x(1,0,0,0) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) . \end{array}$$

La famille

$$\big(u_1 := (1,0,0,0) \ ,\ u_2 := (0,1,0,-1) \ ,\ u_3 := (0,0,1,-1)\big)$$

est donc une famille génératrice de E dont on constate immédiatement qu'elle est libre si bien que c'est une base de E dont on confirme ainsi qu'il est de dimension 3.

Dimension et base de F Le sous espace F est l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ z-2t & = & 0 \end{array}\right\}$$

dont on constate qu'il a deux inconnues principales et deux inconues secondaires ; ce qui permet d'établir que F est de dimension 2 ; ce que nous allons confirmer en en déterminant une base :

$$\begin{array}{rrcl} & (x,y,z,t) & \in & F \\ \Leftrightarrow & x=-y & \text{et} & z=2t \\ \Leftrightarrow & (x,y,z,t) & = & (x,-x,2t,t) \\ & & = & x(1,-1,0,0) + t(0,0,2,1) . \end{array}$$

Il en résulte que

$$\big(v_1 := (1,-1,0,0) \ ,\ v_2 := (0,0,2,1)\big)$$

est une famille génératrice de F dont on constate immédiatement qu'elle est libre et c'est donc une base de F dont on confirme ainsi qu'il est de dimension 2.

2. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.
Réponse : Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,t) \in E \cap F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ y+z+t & = & 0 \\ z-2t & = & 0 \end{array} \right\} .$$

On constate que ce système est échelonné et qu'il y a 3 inconnues principales et une inconue secondaire ce qui entraîne que l'ensemble de ses solutions est de dimension 1. On a alors :

$$\begin{array}{rrcl} & (x,y,z,t) & \in & E \cap F \\ \Leftrightarrow & x=y=0, y+z+t=0 & \text{et} & z-2t=0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcc} z & = & 2t \\ y & = & -z-t=-3t \\ x & = & -y=3t \end{array} \right\} & & \\ \Leftrightarrow & (x,y,z,t) & = & (3t,-3t,2t,t) \\ & & = & t.(3,-3,2,1) \end{array}$$

d'où il résulte que $(3, -3, 2, 1)$ est une base de $E \ \cap \ F$.
3. Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?
Réponse : On a

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Or $E + F \subset \mathbb{R}^4$, donc $E + F = \mathbb{R}^4$ puisqu'ils ont même dimension. La somme n'est pas directe, puisque $E \cap F \neq \{0\}$ (c'est de dimension 1 d'après la question précédente).

Exercice 3.8.— Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux sous-espaces vectoriels $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y - z = 0\}$.
1. Déterminer la dimension et une base U de E et V de F.
2. Démontrer que $U \cup V$ est liée et expliciter une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de U et V .
3. Donner une base de $E + F$ et de $E \cap F$.
Réponse :

1. Le sous-espace E de $\mathbb{R}^3$ est décrit par l'équation cartésienne $x + y - z = 0$ qui possède 2 paramètres (inconnues secondaires) (y et z), donc $\dim E = 2$. On peut aussi dire que le système homogène dont E est l'ensemble des solutions est de rang 1, donc que sa dimension est $3 - 1 = 2$. Par le même argument, on a $\dim F = 2$. Pour trouver une base de chaque espace, on passe de sa représentation cartésienne

à sa représentation paramètrique. Pour E, on a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in E &\iff x+y-z=0\\
&\iff \exists \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -\lambda_1 &+& \lambda_2\\ y &=& \lambda_1 && \\ z &=& && \lambda_2 \end{array}\right.\\
&\iff \exists \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ (x,y,z)=\lambda_1.(-1,1,0)+\lambda_2.(1,0,1)\\
&\iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}(\,(-1,1,0),(1,0,1)\,)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $U=(\,(-1,1,0),(1,0,1)\,)$ est une famille génératrice de E, et donc une base (puisque $\dim E=2$). De même, pour F on a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in F &\iff 2x-y-z=0\\
&\iff \exists \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& \lambda_1 &+& \lambda_2\\ y &=& 2\lambda_1 && \\ z &=& && 2\lambda_2 \end{array}\right.\\
&\iff \exists \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ (x,y,z)=\lambda_1.(1,2,0)+\lambda_2.(1,0,2)\\
&\iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}(\,(1,2,0),(1,0,2)\,)
\end{aligned}$$

et donc la famille $V=(\,(1,2,0),(1,0,2)\,)$ est une famille génératrice de F, et donc une base.

2. Ici par la notation $U\cup V$, on entend la famille obtenue par concaténation de U et V, c'est-à-dire la famille $(\,(-1,1,0),(-1,0,1),(1,2,0),(1,0,2)\,)$. Nommons les vecteurs u_1, u_2, v_3, v_4 respectivement. Et cherchons les relations de dépendance linéaire qui existent entre ces quatre vecteurs en résolvant le système linéaire :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.v_3 + \lambda_4.v_4 = 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & 3\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & & & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient un système échelonné à 1 paramètre (λ_4). En prenant $\lambda_4 = 1$ comme valeur de paramètre, on trouve la solution $(2, -2, -1, 1)$, c'est-à-dire qu'on a la relation de dépendance

$$2.u_1 - 2u_2 - v_3 + v_4 = 0$$

ce qu'on peut vérifier aisément. Etant donné que le système admet un seul paramètre, toute autre relation de dépendance est proportionnelle à celle-ci.

3. L'espace $E + F$ est engendré par la famille $U \cup V$. D'après le cours (proposition 2.8.7), une base de $E + F$ est donnée en gardant les vecteurs de la famille dont les indices correspondent à ceux des inconnues principales, c'est-à-dire que la famille (u_1, u_2, v_3) est une base de $E + F$. En particulier, $\dim(E + F) = 3$.
Comme $\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 1$, il nous suffit de trouver un vecteur non nul dans $E \cap F$ pour avoir une base. Or d'après la question précédente, nous savons que $2.u_1 - 2u_2 - v_3 + v_4 = 0$ donc on peut écrire

$$\underbrace{2.u_1 - 2u_2}_{\in E} = \underbrace{v_3 - v_4}_{\in F}$$

Cela entraine que le vecteur $2.u_1 - 2u_2$ (qui est bien non nul) est dans E mais aussi dans F, c'est-à-dire qu'il est dans $E \cap F$, et forme donc une base de cet espace.

Exercice 3.9.— Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1, 1), v_3 = (1, 1, 3, 1), v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
Réponse : Pour savoir si la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre il faut connaître les réels x, y, z, t tels que $xv_1 + yv_2 + zv_3 = tv_4 = 0$, ce qui conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} x + z + 2t & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + y + 3z + 5t & = & 0 \\ y + z + t & = & 0 \end{cases}$$

En échelonnant on trouve le système équivalent

$$\begin{cases} x + z + 2t & = & 0 \\ 2y + 2z + 2t & = & 0 \\ y + z + t & = & 0 \\ y + z + t & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z + 2t & = & 0 \\ y + z + t & = & 0 \end{cases}$$

ce qui donne les solutions $x = -z - 2t$, $y = -z - t$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) n'est donc pas libre.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Déterminer la dimension de F et une base de F. En déduire le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4).
Réponse : Le rang du système précédent étant deux, c'est aussi la dimension de F et le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4). Les vecteurs v_1 et v_2 étant non colinéaires ils forment une base de F. Le rang du système précédent étant deux, c'est aussi la dimension de F et le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4). Les vecteurs v_1 et v_2 étant non colinéaires ils forment une base de F.
3. Trouver un supplémentaire de F.
Réponse : Si $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ on montre très facilement que la famille (v_1, v_2, e_3, e_4) est libre. On pose $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Si un vecteur u appartenait à la fois à F et à H on aurait $u = xv_1 + yv_2 = ae_3 + be_4$ ce qui contredit le fait que les quatre vecteurs v_1, v_2, e_3, e_4 sont indépendants donc $F \cap H = \{0\}$. Puisque $\dim F + \dim H = 4$ on peut conclure que H est un supplémentaire de F.

Exercice 3.10.— Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = (3, 2, 3, -1, 2), u_2 = (1, 2, 1, -1, -2), u_3 = (1, -6, 1, 3, 14),$$

$$v_1 = (3, 4, 3, -2, -2), v_2 = (-2, -3, -3, 1, 2), v_3 = (2, 1, -3, -3, 2).$$

Soient $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
1. Trouver une base et la dimension de E.

Réponse : Ecrivons le système donné par l'égalité $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ et échelonnons le :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 14\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ L_3 = L_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 14\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & 0 \\ & - & 4\lambda_2 & + & 20\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système échelonné de rang 2, avec λ_1 et λ_2 comme inconnues principales et λ_3 comme inconnue auxiliaire. On en déduit que (u_1, u_2) est une base de E, et donc $\dim(E) = 2$.

2. Même question pour F.

Réponse : Même méthode :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & -\lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système échelonné de rang 2, avec λ_1 et λ_2 comme inconnues principales et λ_3 comme inconnue auxiliaire. On en déduit que (v_1, v_2) est une base de F, et donc $\dim(F) = 2$.

3. Donner une famille génératrice de $E + F$. A-t-on $E + F = \mathbb{R}^5$?
Réponse : A partir des familles génératrices de E et de F vues aux questions précédentes, on déduit que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une famille génératrice de $E + F$. C'est une famille comportant 4 éléments, elle ne peut donc pas engenedrer $\mathbb{R}^5$, qui est de dimension 5.

4. Déterminer une base et la dimension de $E + F$.
Réponse : On cherche à extraire de (u_1, u_2, v_1, v_2) une base de $E + F$ comme dans les

questions 1 et 2 :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & & & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & 4\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & & 4\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système échelonné avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ comme inconnues principales et λ_3 comme inconnue secondaire, on en déduit que (u_1, u_2, v_2) est une base de $E+F$, et donc $\dim(E+F) = 3$.

5. Quelle est la dimension de $E \cap F$? E et F sont-ils en somme directe ?

Réponse : D'après les questions précédentes, $\dim(E) = 2$, $\dim(F) = 2$ et $\dim(E+F) = 3$; la formule $\dim(E+F) = \dim(E)+\dim(F)-\dim(E\cap F)$ nous dit donc que $\dim(E\cap F) = 1$. En particulier, $E \cap F \neq \{0\}$ donc E et F ne sont pas en somme directe.

6. Donner une base de $E \cap F$.

Réponse : On reprend le système de la question 4 :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

En fixant la valeur de la seule inconnue secondaire λ_3 à 1, on trouve que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0)$ est une solution du système, c'est-à-dire que $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 \in E \cap F$. Comme on sait que $\dim(E \cap F) = 1$, v_1 est une base de $E \cap F$.

7. Donner un supplémentaire (dans $\mathbb{R}^5$) de $E + F$, et un supplémentaire de E et de F.

Réponse : On cherche à compléter la base (u_1, u_2, V_2) de $E + F$ en une base de $\mathbb{R}^5$. On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et on résout : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_2 + \mu_1 e_1 +$

$\mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5 = 0$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + \mu_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \mu_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \mu_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + \mu_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 + \mu_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \mu_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_1 + 3\mu_4 = 0 \\ - \lambda_3 + \mu_2 + 2\mu_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \mu_3 + 3\mu_4 = 0 \\ - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\mu_4 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_1 + 3\mu_4 = 0 \\ - \lambda_3 + \mu_2 + 2\mu_4 = 0 \\ 2\lambda_3 + \mu_1 + \mu_3 + 6\mu_4 = 0 \\ - 2\mu_1 - 4\mu_4 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_1 + 3\mu_4 = 0 \\ - \lambda_3 + \mu_2 + 2\mu_4 = 0 \\ + \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + 10\mu_4 = 0 \\ - 2\mu_1 + 2\mu_4 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4 = 0 \\ - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_1 + 3\mu_4 = 0 \\ - \lambda_3 + \mu_2 + 2\mu_4 = 0 \\ + \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + 10\mu_4 = 0 \\ 4\mu_2 + 2\mu_3 + 22\mu_4 + \mu_5 = 0 \end{cases}$$

C'est un système échelonné dont les inconnues principales sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$; on en déduit que $(u_1, u_2, v_2, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^5$. Par le cours, puisque $E+F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_2)$, on sait donc que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est un supplémentaire de $E + F$. De même, puisque $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $\mathrm{Vect}(v_2, e_1, e_2)$ est un supplémentaire de E. Enfin, comme $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$

forme une base de $E \cap F$, u_1 n'est pas dans F (car il est dans E mais n'est pas proportionnel à $\frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$), et on en déduit que (u_1, v_1, v_2) est une autre base de $E+F$. En utilisant le supplémentaire de $E+F$, on en déduit que $(u_1, v_1, v_2, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^5$, et comme $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$, $\text{Vect}(u_1, e_1, e_2)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 3.11.— Supplémentaires dans l'espace des polynômes et division euclidienne.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré au plus 5.
1. Montrer que
$$F := \{(x^2 + x + 1)Q(x),\ Q \in \mathbb{R}_3[X]\}$$
est un s.e.v de $\mathbb{R}_5[X]$. En donner une base.
Réponse : F est non vide puisque $0 = (x^2 + x + 1) \cdot 0$ et $0 \in R_3[X]$. Soit $f, g \in F$, alors $f = (x^2 + x + 1)Q(x)$ et $g = (x^2 + x + 1)R(x)$ avec $Q, R \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc
$$\lambda f + g = \lambda(x^2 + x + 1)Q(x) + (x^2 + x + 1)R(x) = (x^2 + x + 1)(\lambda Q + R)(x).$$
Or puisque $Q, R \in \mathbb{R}_3[X]$ (qui est un espace vectoriel), $\lambda Q + R \in R_3[X]$, donc $\lambda f + g \in F$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Soit $f = x^2 + x + 1, g = x^3 + x^2 + x = (x^2+x+1)x, h = x^4 + x^3 + x^2, k = x^5 + x^4 + x^3$ (i.e. les multiples par $x^2 + x + 1$ de la base naturelle $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$). Supposons que
$$\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h + \lambda_4 k = 0,$$
i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x^2 + x + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3) = 0.$$
Notons $R(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 \in R_3[X]$, alors $(x^2+x+1)R(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0, 1, 2, 3$, on a que $x^2+x+1 \neq 0$, donc $R(x)$ s'annule en $x = 0, 1, 2, 3$, or R est un polynôme de degré ≤ 3, qui a au moins 4 racines, donc $R = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, donc la famille (f, g, h, k) est libre. Soit $S \in F$, alors
$$S = (x^2 + x + 1)R(x), \quad R \in \mathbb{R}_3[X].$$
Notons $R(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3$, alors
$$S = (x^2 + x + 1)R(x) = \lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h + \lambda_4 k.$$
Donc (f, g, h, k) est génératrice : c'est donc une base de F qui est donc de dimension 4.
2. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires.
Réponse : Les éléments de F sont des polynômes multiples de $(x^2 + x + 1)$, ils sont donc soit de degré ≥ 2, ou soit le polynôme nul. Or $R_1[X]$ est justement l'ensemble des polynomes de degré ≤ 1, donc
$$\mathbb{R}_1[X] \cap F = \{0\}.$$

De plus

$$\dim \mathbb{R}_1[X] = 2, \quad \dim F = 4, \quad \dim \mathbb{R}_5[X] = 6.$$

Donc

$$\dim(\mathbb{R}_1[X] \ + F) = \dim \mathbb{R}_1[X] + \dim F - \dim \mathbb{R}_1[X] \cap F = 6.$$

Comme $\mathbb{R}_1[X] + F \subset \mathbb{R}_5[X]$ et qu'il y a égalité des dimensions, $\mathbb{R}_1[X] + F = \mathbb{R}_5[X]$. Donc $\mathbb{R}_1[X]$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$, on note

$$\mathbb{R}_1[X] \oplus F = \mathbb{R}_5[X].$$

3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$.
Réponse : Par définition, pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$, $P \in \mathbb{R}_1[X] \oplus F$ et donc il existe un unique couple $(R, (x^2 + x + 1)Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times F$ tel que

$$P = R(x) + (x^2 + x + 1)Q(x).$$

Exercice 3.12.— Bases de l'espace des polynômes.

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, montrer qu'une famille finie de fonctions polynomiales ayant des degrés différents est libre.
Réponse : Raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments d'une famille F de polynômes de degrés deux à deux distincts. Si F ne contient qu'un élément, on le supposera évidemment non nul, c'est une famille libre.
Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons qu'une famille à n éléments de degrés deux à deux distincts et nécessairement libre et considérons une famille F à $n + 1$ éléments de degrés deux à deux distincts. Notons f_0 l'élément de F de plus grand degré et

$$G \ := \ F \ \setminus \ \{f_0\} \ .$$

La famille G est alors une famille à n éléments de degrés deux à deux distincts ; si bien qu'en vertu de l'hypothèse de récurrence, c'est une famille libre qu'on notera $(g_1, \dots, g_n)$. Il faut alors remarquer que, pour tout $f \in \mathrm{Vect}(G)$ le degré de f est inférieur ou égal au plus grand des degré des $g_i\,_{,1 \leq i \leq n}$ donc en particulier strictement inférieur au degré de f_0. Ainsi $f_0 \notin \mathrm{Vect}(G)$. La famille $(g_1, \dots, g_n)$ est alors une base de $\mathrm{Vect}(G)$ et l'on a déjà vu à plusieurs reprises dans les exercices précédent, qu'alors, $(f_0, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre.

2. Soit d un entier naturel. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
a. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré $\leq d$, montrer que la famille $(m_0, \dots, m_d)$ de fonctions définies par $m_0(x) = 1$, $m_1(x) = x - a, \dots, m_d(x) = (x - a)^d$ est une base.
Réponse : Il découle du point précédent, puisque les $m_i\,_{,0 \leq i \leq d}$ sont de degrés deux à deux distincts qu'ils forment une famille libre. En répondant à la question suivante on montrera

qu'elle est génératrice à moins qu'on ne considère comme connu le fait que $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$ si bien que la famille $m_{i\ ,0\leq i\leq d}$ est libre maximale donc une base.

b. Montrer que les coordonnées de $f \in \mathbb{R}_d[X]$ dans cette base sont $(f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(d)}(a)}{d!})$

Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\theta \in [a, x]$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) \\ &+ \dots + \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + \dots \\ &+ \frac{1}{d!}(x-a)^d f^{(d)}(a) + \frac{1}{(d+1)!}(x-a)^{d+1} f^{d+1}(\theta) \ . \end{aligned}$$

Or pour $f \in \mathbb{R}_d[X]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(d+1)}(x) = 0 \ .$$

Ceci montre que la famille $m_{i\ ,0\leq i\leq d}$ est génératrice de $\mathbb{R}_d[X]$ et donne explicitement les coordonnées d'un élément f. On rappelle qu'on avait préalablement montré que cette famille est libre et donc que c'est une base.

3. On considère l'ensemble F des fonctions dans $\mathbb{R}_4[X]$ vérifiant $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$.

— Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_4[X]$.

Réponse : La fonction nulle et bien entendu élément de F ; si bien que F est non vide. Par ailleurs pour tous f et g dans F et tous réels α et β et tout entier $0 \leq k \leq 2$,

$$(\alpha f + \beta g)^{(k)}(a) = \alpha f^{(k)}(a) + \beta g^{(k)}(a) = 0$$

si bien que

$$\alpha f + \beta g \in F \ ;$$

c'est-à-dire que F est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.

— Donner une base de F et sa dimension.

Réponse : Il résulte de que

$$\forall f \in \mathbb{R}_4[X] \ , \ f(x) = f(a)m_0 + f'(a)m_1 + \frac{1}{2}f''(a)m_2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)m_3 + \frac{1}{24}f^{(4)}m_4 \ .$$

ainsi pour $f \in F$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(a)m_3 + \frac{1}{24}f^{(4)}m_4 \ .$$

Il en résulte que $F \subset \mathrm{Vect}(m_3, m_4)$. Or

$$m_3'(x) = 3(x-a)^2 \ , \ m_3''(x) = 6(x-a) \ , \ m_4'(x) = 4(x-a)^3 \text{ et } m_4''(x) = 12(x-a)^2 \ .$$

Il s'ensuit que

$$m_3(a) = m_3'(a) = m_3''(a) = m_4(a) = m_4'(a) = m_4''(a) = 0$$

c'est-à-dire que

$$m_3 \in F \text{ et } m_4 \in F$$

si bien que $\mathrm{Vect}(m_3, m_4) \subset F$ et finalement

$$F = \mathrm{Vect}(m_3, m_4) .$$

Come (m_3, m_4) est une famille libre, c'est une base de F.

— Donner un supplémentaire de F.
Réponse : Puisque $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, (m_3, m_4) une base de F, $G := \mathrm{Vect}(m_0, m_1, m_2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 3.13.— Polynômes de Tchebychev.

1. Démontrer qu'il existe une fonction polynomiale T_n de degré n telle que pour $\theta \in [0, \pi]$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
Réponse : On va utiliser à de nombreuse reprises dans la suite, le fait suivant : *Si deux polynômes prennent les mêmes valeurs sur un intervalle $[a, b]$ $a < b$, ils sont égaux ; ce qui revient à dire que si un polynôme s'annule sur un intervalle $[a, b,]$ $a < b$, c'est le polynôme nul.*
Cet énoncé repose sur le fait qu'un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines et qu'un intervalle $[a, b]$ $a < b$ est un ensemble infini.

T_0 si T_0 existe, nécessairement

$$T_0(\cos(\theta)) = \cos(0\eta) = 1$$

ce qui entraîne que

$$\forall x \in [-1, 1], T_0(x) = 1 .$$

Or si l'on exige que T_0 soit une fonction polynômiale, la seul à répondre à la question est la fonction constante définie par

$$T_0(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

en vertu de la remarque préliminaire faite ci-dessus.

T_1 De même si T_1 existe, nécessairement

$$T_1(\cos(\theta)) = \cos(1\theta) = \cos(\theta)$$

si bien que

$$\forall x \in [-1, 1] , \ T_1(x) = x$$

ce qui entraîne, si l'on exige encore que T_1 soit un polynôme, toujours pour la même raison que ci-dessus que

$$\forall x \in \mathbb{R} , \ T_1(x) = x .$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe des fonctions polynômiales T_n et T_{n+1} satisfaisant les conditions de l'énoncé

Indication : construire T_{n+2} à partir de T_n et T_{n+1}, en utilisant la formule bien connue $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
Réponse : En utilisant la formule précédente pour $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, en utilisant que $\sin(-b) = -\sin(b)$, et en sommant les deux formules on obtient

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

On pose alors $a = (n+1)\cos(\theta)$ et $b = \cos(\theta)$, on obtient

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta). \qquad (1)$$

Donc si $T_{n+2}(X)$ existe, il vérifie

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2T_{n+1}(x)T_1(x)$$

i.e. puisque $T_1(x) = x$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Comme T_n est degré n et T_{n+1} de degré $n+1$, T_{n+2} est de degré $n+2$, et évidemment,

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta),$$

d'où, d'après la formule (1), $T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$. Donc par récurrence, on a pour tout n un polynôme T_n de degré n tel que $T_n(\cos(\theta))\cos(n\theta)$.
Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.
Réponse : On a déjà $T_0 = 1$ et $T_1 = x$, on utilise la formule de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ démontrée précédemment, on a donc

$$T_2 = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad T_3 = 2xT_2 - T_1 = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x.$$

2. Soit d un entier naturel. Montrer que $T_0, \ldots, T_d$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
Réponse : $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$ (par exemple une base est donnée par $1, X, \ldots, X^d$, elle contient $d+1$ éléments). Il suffit donc de montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_d)$ est libre (puisqu'elle contient aussi $d+1$ vecteurs). Supposons donc donnés $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_d T_d = 0, \qquad (2)$$

donc en évaluant en x et en regardant le coefficient dominant, on a un polynôme dont le coefficient de X^d est

$$\lambda_d X^d.$$

Or la famille $(1, X, \ldots, X^d)$ est libre, donc $\lambda_d = 0$. Donc en regardant le coefficient de X^{d-1} dans l'équation (2), on voit que

$$\lambda_{d-1} = 0,$$

toujours par liberté de $(1, X, \ldots, X^{d-1})$. Une récurrence (descendante) immédiate montre que $\lambda_i = 0$ pour tout i, donc la famille $T_0, T_1, \ldots, T_d$ est libre.

Remarque : En fait toute famille de polynôme de degrés échelonnés est libre (par la même preuve).

3. Calculer $\int_0^\pi T_n(\cos\theta).T_m(\cos\theta)d\theta$. En déduire, pour une fonction polynomiale f de degré $\leq d$, une expression des coordonnées de f sur la base $(T_0, \ldots, T_d)$ faisant intervenir des intégrales.

Réponse : On réutilise l'équation (1) ici, on a

$$\int_0^\pi T_n(\cos(\theta)T_m(\cos(\theta))d\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\right)d\theta,$$

d'après la définition des T_n et l'équation (1). On doit donc calculer $\int_0^\pi \cos(k\theta)d\theta$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$. Si $k = 0$,

$$\int_0^\pi \cos(0)d\theta = \pi,$$

et si $k \neq 0$, on effectue le changement de variable $u = k\theta$,

$$\int_0^\pi \cos(k\theta)d\theta = \frac{1}{k}\int_0^{k\theta} \cos(u)du = \frac{1}{k}\left[\sin(u)\right]_0^{k\pi} = 0.$$

Autrement dit, si $n = m = 0$, on a $\int_0^\pi T_n(\cos(\theta)T_m(\cos(\theta))d\theta = \pi$, sinon, comme $n+m \neq 0$, on a

$$\int_0^\pi T_n(\cos(\theta)T_m(\cos(\theta))d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Soit alors f une fonction polynomiale de degrée d. Comme $T_0, \ldots, T_d$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$, on peut écrire

$$f = \lambda_0 T_0 + \cdots + \lambda_d T_d,$$

avec $(\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ les coordonnées de f dans la base $(T_0, \ldots, T_d)$. On calcule :

$$\int_0^\pi f(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))d\theta = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \int_0^\pi T_k(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))d\theta,$$

et $\int_0^\pi T_k(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta))d\theta$ s'annule pour $k \neq 0$, vaut π pour $k = m = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ si $k = m \neq 0$. Donc $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\cos(\theta))d\theta$, et, pour $k \neq 0$,

$$\lambda_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos(\theta))\cos(k\theta)d\theta.$$