
INVARIANTS DE HASSE μ -ORDINAIRES

par

Valentin Hernandez

Abstract. — In this article, we construct in a purely local way partial (Hasse) invariants for p -divisible groups with given endomorphisms, using crystalline cohomology. These invariants generalises the classical Hasse invariant, and allow us to study families of such groups. We also study a few geometric properties of these invariants. Used in the context of Shimura varieties, for example, these invariants are detecting some Newton strata, including the μ -ordinary locus.

Résumé. — Dans cet article on se propose de construire d'une manière purement locale des invariants partiels pour des groupes p -divisibles munis d'endomorphismes, en utilisant des résultats de cohomologie cristalline. Ces invariants généralisent l'invariant de Hasse, et permettent d'étudier des familles de tels groupes. On étudie aussi différentes propriétés géométriques de ces invariants. Appliqués – par exemple – à certaines variétés de Shimura, ces invariants détectent certaines strates de Newton, notamment la strate μ -ordinaire.

Table des matières

1. Introduction	2
2. Notations et décompositions	5
3. Le cas d'un corps parfait	6
4. Construction dans le cas d'une base lisse	14
5. Descente au corps réflexe	23
6. Changement de Base	25
7. Compatibilité au produit	26
8. Cas d'une base quelconque : Champ des \mathcal{O} -modules tronqués et lieu μ -ordinaire.	29
9. Multiplicité du diviseur ${}^{\mu} \text{Ha}$	34
10. Compatibilité à la dualité	46
11. \mathcal{O} -modules p -divisibles μ -ordinaires sur \mathcal{O}_C	50
Annexe A. Rappels sur les Champs et modules quasi-cohérents	53
Annexe B. Diviseurs de Cartier et Champs	55
Références	57

1. Introduction

1.1. Chronologie. — L'introduction de l'invariant de Hasse remonte à 1936, et à la construction par Hasse et Witt, [HW36], pour une courbe algébrique C (non-singulière) de genre g sur un corps fini de caractéristique p , d'une matrice H de taille $g \times g$, dite de Hasse-Witt. En particulier pour les courbes elliptiques sur une base de caractéristique p , traité par Hasse un peu avant le cas général de Hasse-Witt, Katz, dans [Kat73], donne alors la définition suivante, de ce qu'on appelle invariant de Hasse,

Définition 1.1 (Katz). — Soit S un schéma de caractéristique p , et $f : E \rightarrow S$ un schéma elliptique. Le Frobenius relatif $F : E \rightarrow E^{(p)}$ de E/S induit une application,

$$F^* : F^*(R^1 f_* \mathcal{O}_E) = (R^1 f_* \mathcal{O}_E)^{\otimes p} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_E,$$

qui en passant au dual induit une section $\widetilde{\text{Ha}} \in H^0(S, \omega_{E/S}^{\otimes(p-1)})$, appelée *invariant de Hasse* de E/S .

Cette définition s'étend simplement aux schémas abéliens et aux groupes p -divisibles sur un schéma de caractéristique p , en regardant le déterminant du Frobenius sur l'algèbre de Lie du dual de Cartier. Une première application de l'invariant de Hasse apparait dans les travaux de Deligne et Serre [DS74] sur la construction des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de poids 1. Cette application utilise de manière cruciale la série d'Eisenstein E_{p-1} (si $p \geq 5$) pour construire des congruences entre formes modulaires, en utilisant le résultat de Deligne selon lequel le développement de la série d'Eisenstein E_{p-1} est congrue à 1 modulo p . Le fait est alors que E_{p-1} relève l'invariant de Hasse. En particulier, il y a un lien très fort entre l'invariant de Hasse et les congruences entre formes modulaires. Citons par exemple Hida, [Hid86], qui sur une courbe modulaire X sur \mathbb{Z}_p , utilise l'invariant de Hasse et le lieu ordinaire de $X \otimes \mathbb{F}_p$ pour construire des espaces de formes modulaires p -adiques, qui réalisent les congruences (modulo des puissances de p) entre des formes modulaires.

Pour une variété abélienne sur un corps de caractéristique p , l'invariant de Hasse est non nul, exactement lorsque la variété abélienne est ordinaire, c'est à dire quand son p -rang est maximal. Si une variété est définie sur \mathcal{O}_C , $C = \widehat{\mathbb{Q}}_p$, et que son p -rang est maximal, il y a alors un sous-groupe dans la p -torsion (de type multiplicatif) qui relève canoniquement la partie multiplicative (i.e. le noyau du Frobenius) modulo p . On peut alors caractériser l'existence d'un tel sous-groupe, sous la condition que la valuation (tronquée) de l'invariant de Hasse (vu comme élément de \mathcal{O}_C/p) est plus petite que $\frac{1}{2}$. C'est un théorème de Lubin dans le cas d'une courbe elliptique, et de nombreux autres auteurs en dimension supérieure, en particulier Fargues (cf. [Kat73],[Far11]). Notons le lien avec les congruences entre formes modulaires, puisque le sous-groupe précédent permet de construire des opérateurs compacts sur des espaces de formes modulaires p -adiques ([Hid86],[Kat73],[Pil13] et [AIS14]).

Le cas le plus intéressant d'un schéma S sur lequel on dispose d'une variété abélienne (ou un groupe p -divisible), est probablement celui où S est une variété de Shimura (c'est le cas de [Kat73],[Hid86]). Il arrive néanmoins que pour de nombreuses variétés de Shimura, le lieu des points ordinaires (le lieu ordinaire) soit vide, ou de manière équivalente, l'invariant de Hasse soit nul en tout point. C'est par exemple le cas des variétés de Picard, pour $U(2,1)$, associé à un corps CM E , lorsque p est inerte dans E . Bien que le lieu ordinaire soit vide, il existe un ouvert, appelé lieu μ -ordinaire, qui peut se définir à l'aide de la théorie des groupes (cf. [RR96]), ou dans le cas PEL, à l'ensemble des points de la variété de Shimura dont le groupe p -divisible a un polygone de Newton "minimal" (voir section 3). Lorsque la donnée de Shimura est PEL et non ramifiée, ce lieu est étudié par Wedhorn dans [Wed99], qui prouve que c'est un ouvert dense, et qu'il coïncide avec le lieu ordinaire lorsque ce dernier est non vide. Dans le cas contraire, que l'on appellera *cas μ -ordinaire*, pour une variété de Shimura de type unitaire, Goldring et Nicole ont construit dans [GN13] un invariant, dit invariant de Hasse μ -ordinaire, qui détecte exactement le lieu μ -ordinaire.

La stratégie de [GN13] est basée sur l'action du Frobenius sur la cohomologie de De Rham modulo p de la variété abélienne universelle, et (comme le lieu ordinaire est vide) de montrer qu'il existe une "division" de l'action de Frobenius par une bonne puissance de p , division qui n'est alors pas identiquement nulle sur S . L'argument de [GN13] est alors le suivant, on regarde la variété universelle au dessus du lieu μ -ordinaire, dans ce cas la cohomologie cristalline est relativement explicite, et on peut diviser une puissance du Frobenius, et étendre cette construction par densité à tout la variété grâce à un résultat de De Jong. Le même argument de densité est utilisé pour montrer que cette division

passer au quotient à la cohomologie de De Rham. Le problème de l'argument de densité est qu'il rend la construction peu explicite hors du lieu ordinaire, et donc peu adaptée aux calculs que l'on espère faire. De plus, la construction est globale, alors que l'invariant de Hasse est un objet local (il ne dépend que du groupe p -divisible). Il y a aussi des travaux récents sur le sujet concernant d'autres invariants de Hasse (sur des strates plus générales que notre strate μ -ordinaire), [Box15, KW14, GK15], dont l'un des invariants, celui associé à la strate μ -ordinaire, est un produit des invariants partiels construit dans cet article. Mais ces constructions (bien que locales pour [KW14, GK15]) ne sont pas aussi explicites que l'on espère, mais parfaitement adaptées à généraliser le travail de [DS74]. On propose alors une autre construction, sur laquelle on peut explicitement calculer les invariants de Hasse partiels, et leur produit l'invariant μ -ordinaire, et en déduire des propriétés intéressantes : le fait qu'ils soient réduits dans certains cas, et la compatibilité à la dualité. Dans un futur travail, [Her], on utilisera cette construction explicite pour relier les invariants à la construction d'une filtration dite canonique dans les points de torsion d'un groupe p -divisible, dans un cadre plus général que celui [Far11].

1.2. Résultats. — Notre construction est dans l'esprit très proche de la construction originale de [GN13], puisqu'elle est basée sur la cohomologie cristalline. Plutôt que de se donner une variété de Shimura, on se donne F/\mathbb{Q}_p une extension non ramifiée, \mathcal{O} son anneau d'entiers, S un \mathcal{O} -schéma de caractéristique p , $G \rightarrow S$ un groupe de Barsotti-Tate (p -divisible) tronqué d'échelon r , et on suppose que G est un \mathcal{O} -module, $\iota : \mathcal{O} \rightarrow \text{End}_S(G)$. L'action de \mathcal{O} sur G donne une action de \mathcal{O} sur son faisceau conormal, ainsi que celui de G^D , le dual de Cartier de G , et comme cet anneau est non ramifié, on peut décomposer selon $\mathcal{I} = \text{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$,

$$\omega_G = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G, \tau} \quad \text{et} \quad \omega_{G^D} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G^D, \tau}.$$

Ces faisceaux sont localement libres, et quitte à prendre une union de composantes connexes de S , on peut supposer leur rang constant. On note alors $p_\tau = \text{rg}_{\mathcal{O}_S} \omega_{G, \tau}$ et $q_\tau = \text{rg}_{\mathcal{O}_S} \omega_{G^D, \tau}$, la signature de (G, ι) .

On a alors le théorème suivant, qui rassemble plusieurs énoncés du corps de l'article : théorème 8.4, théorème 9.16, théorème 10.8.

Théorème 1.2. — *Notons $f = [\mathcal{O} : \mathbb{Z}_p]$. Supposons r assez grand relativement à la signature de G (voir Théorème 8.4 et la remarque qui le précède). Il existe une section*

$$\widetilde{\mu \text{Ha}}(G) \in H^0(S, \det(\omega_{G^D})^{\otimes (p^f - 1)}),$$

*telle que pour $s \in S$, $\widetilde{\mu \text{Ha}}(G)_s$ est inversible si et seulement si G_s est μ -ordinaire. La section $\widetilde{\mu \text{Ha}}(G)$ coïncide après multiplication par une puissance de p explicite, dépendant de la signature de G , avec le déterminant du *Verschöbung* agissant sur le cristal de Berthelot-Breen-Messing de G . De plus on a les compatibilités suivantes*

1. *Pour tout $\pi : S' \rightarrow S$, on a l'identification $\pi^* \widetilde{\mu \text{Ha}}(G) = \widetilde{\mu \text{Ha}}(\pi^* G)$,*
2. *$\widetilde{\mu \text{Ha}}(G) = \widetilde{\mu \text{Ha}}(G^D)$, où G^D est le dual de Cartier de G .*

La compatibilité à la dualité de l'invariant de Hasse "classique" avait été établie par Fargues dans [Far11], proposition 2, voir aussi [Bij16] dans un cas plus général, et on arrive, malgré quelques difficultés supplémentaires d'ordre principalement combinatoire, à établir cette compatibilité dans notre cas, cf. théorème 10.8.

Le théorème précédent vaut en particulier lorsque S est une variété de Shimura de type PEL. Lorsque S est une variété de Shimura PEL simple, comme dans la section 9.1, (essentiellement p inerte dans le corps totalement réel), on a alors le théorème suivant,

Théorème 1.3. — *L'invariant de Hasse $\mu \text{Ha} \in H^0(S, (\det \omega)^{\otimes (p^f - 1)})$ définit un diviseur de Cartier de S . De plus, lorsque tous les p_τ (sauf éventuellement 0, h) sont distincts, ce diviseur de Cartier est réduit.*

Dans le cas de la courbe modulaire, l'invariant de Hasse est un diviseur de Cartier réduit c'est un résultat dû à Igusa, qui a été généralisé dans le cas des variétés de Siegel par Pilloni ([Pil12]); Théorème A.4. Dans le cas d'autres variétés de Shimura dont le lieu ordinaire est non vide, l'invariant de Hasse peut être non réduit (par exemple le cas des variétés de Hilbert). Notre condition est nécessaire et suffisante, cf. remarque 9.23.

1.3. Construction. — Essayons d'expliquer un peu plus en détails la construction du μ -invariant de Hasse, ainsi que la démonstration de ses propriétés. Etant donnée (G, ι) un groupe p -divisible tronqué d'échelon r sur S muni d'une action de \mathcal{O} , et signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$, on a les décompositions,

$$\omega_G = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G, \tau} \quad \text{et} \quad \omega_{G^D} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G^D, \tau}$$

dont les rangs des modules sont donnés par la signature. De plus, le Frobenius qui agit sur G , induit des morphismes,

$$\omega_{G^D, \tau} \xrightarrow{V} \omega_{G^D, \sigma^{-1}\tau}^{(p)}.$$

Ce morphisme ne peut être injectif si $q_{\sigma^{-1}\tau} < q_\tau$. L'obstruction principale à la non-vacuité du lieu ordinaire réside dans le fait que la signature n'est pas parallèle ($q_\tau = q_{\tau'}$ pour tout τ, τ'). Si la signature n'est pas parallèle, alors $V^f : \omega_{G^D, \tau} \rightarrow \omega_{G^D, \tau}^{(p^f)}$ n'est pas inversible, car un de ses composant n'est pas injectif, bien que ces deux faisceaux aient même rang. L'idée, déjà présente dans [GN13], est que si S se relève sur \mathbb{Z}_p^{nr} en un schéma sans torsion \tilde{S} , sur lequel on a une variété abélienne \tilde{A} tel que $G = \tilde{A}[p^r] \otimes_{\tilde{S}} S$, on a peut alors regarder $\mathcal{H}_{dR}^1(\tilde{A}/\tilde{S})$, qui se décompose selon les plongements τ , et sur lequel on a un Verschiebung σ^{-1} -linéaire, qui est injectif. On peut alors considérer $V^f : \mathcal{H}_{dR}^1(\tilde{A}/\tilde{S})_\tau \rightarrow \mathcal{H}_{dR}^1(\tilde{A}/\tilde{S})_\tau^{(p^f)}$, et regarder la filtration de Hodge,

$$0 \rightarrow \omega_{\tilde{A}^D/\tilde{S}, \tau} \rightarrow \mathcal{H}_{dR}^1(\tilde{A}/\tilde{S})_\tau \rightarrow \omega_{\tilde{A}/\tilde{S}, \tau}^\vee \rightarrow 0$$

et $\omega_{\tilde{A}^D/\tilde{S}, \tau}$ se réduit modulo p sur $\omega_{G^D, \tau}$. On peut alors espérer diviser par une bonne puissance de p la puissance extérieure q_τ -ième de V^f agissant sur $\mathcal{H}_{dR}^1(\tilde{A}/\tilde{S})_\tau$ qui est localement libre sur \tilde{S} , lui même sans p -torsion, que cette division préserve (la puissance extérieur de) la filtration de Hodge (au moins modulo p), et soit inversible dessus si G est μ -ordinaire, puis réduire modulo p . On en déduira une "division de V^f ", qui nous donnera un invariant partiel, $\widetilde{\text{Ha}}_\tau$. Le produit de ces invariant sera l'invariant de Hasse μ -ordinaire.

En général il ne semble pas possible de trouver un tel \tilde{A} , mais on a un bon substitut de sa cohomologie de De Rham, le cristal de Bethelot-Breen-Messing $\mathbb{D}(G)$ de G . Le problème du site cristallin est qu'il semble difficile en général de maîtriser les différents ouverts mais lorsque S est affine et lisse, on arrive à trouver "de bons ouverts" sur lesquels on arrive à diviser le Verschiebung. C'est pourquoi, dans un premier temps, on suppose que S est lisse (c'est le cas d'une variété de Shimura PEL non ramifiée par exemple, cf. théorème 4.9). Pour obtenir le cas général, remarquons que le champ des $\mathcal{BT}_r^\mathcal{O}$ (groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon r avec action de \mathcal{O} , dont on fixe la signature) est lisse (cf. [Wed01]), il existe donc un schéma X , lisse, et une flèche lisse $X \rightarrow \mathcal{BT}_r^\mathcal{O}$, équivariante sous l'action de $\text{GL}_{p^{rnf}}$ qui par construction agit sur X et trivialement sur $\mathcal{BT}_r^\mathcal{O}$. On peut alors construire les invariants de Hasse sur X et les descendre à $\mathcal{BT}_r^\mathcal{O}$. On en déduit le cas d'une base générale.

Dans le cas ou $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_C/p)$, qui n'est pas lisse, on peut aussi construire les invariants de Hasse, de manière plus directe, en regardant le cristal sur A_{cris} . C'est le cas qui nous interressera dans un futur travail, cf. [Her]. On peut alors montrer que ce sont les mêmes que précédemment (essentiellement car A_{cris} est sans torsion). On peut faire de même sur un espace de déformation d'un groupe p -divisible avec action de \mathcal{O} (voir partie 9.2, et section 9).

Le fait que le μ -invariant ${}^\mu\text{Ha}$ est un diviseur de Cartier est essentiellement un théorème de Wedhorn [Wed99]. Pour montrer qu'il est réduit sur le champ \mathcal{BT}_r , on donne une donnée de Shimura PEL "simple" adaptée à $\mathcal{O}, (p_\tau, q_\tau)$ dans la section 9.1, on note S la variété (sans niveau en p) associée. On peut alors montrer que l'invariant μ -ordinaire sur S est réduit, en étudiant la géométrie des strates de Newton de S , dont on montre que sur celles qui nous intéressent, de codimension 1, l'invariant de Hasse μ -ordinaire y définit une forme linéaire non nulle dans l'espace tangent. L'intérêt est que sur ces strates, on peut utiliser la décomposition de Hodge-Newton rappelée en section 2 ainsi qu'une forme explicite sur chaque anneau local de la déformation universelle en utilisant les displays, et donc de calculer effectivement l'invariant de Hasse. Au passage on montre aussi que ces strates sont des strates "minimales", c'est à dire que ce sont aussi des Strates d'Ekedahl-Oort.

La démonstration de la dualité repose sur les mêmes méthodes.

Explicitons les différentes sections. La section 3 traite le cas d'un groupe p -divisible G avec action de \mathcal{O} sur un corps parfait, qui est extrêmement simple puisqu'à G est associé son cristal de Dieudonné, qui est un $W(k)$ -module libre. On rappelle alors les objets standards associés à G , les théorèmes connus sur les polygones (théorème de Mazur) et la décomposition Hodge-Newton. Dans une seconde partie, on explicite aussi dans ce cas la construction de nos invariants, à la fois pour expliquer au lecteur la philosophie de la construction, mais aussi puisque c'est ce cas qui a servi de fil conducteur à la suite de l'article. La section 4 traite le cas d'une base lisse, qui contient le corps résiduel de F , auquel on peut se ramener par extension des scalaires. La section suivante redescend la construction à une base lisse quelconque. La section 6 montre la compatibilité au changement de base (c'est essentiellement due à la même compatibilité pour le cristal de [BBM82]). Dans la section 7, on donne un exemple où les invariants ne sont pas compatibles au produit (c'est du à un problème combinatoire sur les signatures), et on donne une condition pour que cette compatibilité ait lieu. La section 8 est dédiée à la descente des invariants sur le champ $\mathcal{BT}_r^{\mathcal{O}}$, qui permet donc de faire la construction sur une base quelconque. On y donne aussi des exemples de groupes μ -ordinaires, ainsi que des calculs sur des schémas de base utiles pour la suite. Dans la section 9, on définit des données de Shimura simples, qui seront utilisées ensuite pour montrer (sous une hypothèse précise) que nos invariants sont réduits. Dans la section 10, on montre la compatibilité à la dualité. Enfin, dans la section 11, on donne une forme explicite pour les \mathcal{O} -modules p -divisibles sur \mathcal{O}_C . Les appendices sont des rappels bien connus de notations et définitions à propos des fibrés inversibles sur des champs, ainsi que des diviseurs de Cartier.

En collaboration avec Stéphane Bijakowski dans un article postérieur à celui-ci, [BH16], on a construit des invariants de Hasse partiels dans le cas où l'on autorise de la ramification sur l'anneau \mathcal{O} , à condition de se placer sur des analogues locaux des modèles entiers dit de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura.

Remerciements : Je voudrai remercier Laurent Fargues et Vincent Pilloni pour m'avoir introduit à ce sujet et aussi pour leurs explications, leurs encouragements et leur aide au cours de l'écriture de ce travail. Je voudrai aussi remercier Stéphane Bijakowski pour de nombreux conseils et de nombreuses discussions.

2. Notations et décompositions

Soit p un nombre premier, S un schéma de caractéristique p (i.e. tel que $p\mathcal{O}_S = 0$), F/\mathbb{Q}_p une extension non ramifiée, de degré f , et on note p^f le cardinal du corps résiduel κ_F et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ son anneau des entiers. On note aussi $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_p . On suppose que S est défini au-dessus de κ_F . Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon r sur S , muni d'une action de \mathcal{O} ,

$$\iota : \mathcal{O} \longrightarrow \text{End}_S(G).$$

On note pour la suite $\Sigma_n = \text{Spec}(W_n(\kappa_F))$, $\Sigma = \text{Spec}(W(\kappa_F))$, et \underline{G} le faisceau sur $\text{Cris}(S/\Sigma)$ induit par G . On note

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(\underline{G}^D, \mathcal{O}_{S/\Sigma}),$$

le cristal de Dieudonné (covariant) de G , au sens de Berthelot-Breen-Messing ([BBM82]), qui est munie de deux applications,

$$F : \mathcal{E}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad V : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{(p)},$$

qui sont induites respectivement par le Verschiebung et le Frobenius de G . C'est un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres.

Comme G est muni d'une action de \mathcal{O} , \mathcal{E} l'est aussi. Notons,

$$\mathcal{I} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}, W_n(\kappa_F)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\kappa_F, \overline{\mathbb{F}}_p).$$

Comme S est un κ_F -schéma, on a un isomorphisme,

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \simeq \prod_{\tau \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_{S,\tau},$$

où $\mathcal{O}_{S,\tau} = \mathcal{O}_S$ et \mathcal{O} agit sur $\mathcal{O}_{S,\tau}$ via précomposition du morphisme structural par τ .

Lemme 2.1. — *Il existe une décomposition canonique de \mathcal{E} en sous-cristaux,*

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_\tau,$$

induite par la décomposition $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S \simeq \prod_{\tau \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_{S,\tau}$, telle que,

$$V : \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau}^{(p)} \quad \text{et} \quad F : \mathcal{E}_\tau^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}_{\sigma\tau},$$

où on note $\mathcal{E}_\tau^{(p)} = (\mathcal{E}_\tau)^{(p)}$. De même, on peut décomposer canoniquement les \mathcal{O}_S -modules,

$$\omega_G = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G,\tau} \quad \text{et} \quad \omega_{G^D} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G^D,\tau}.$$

Définition 2.2. — Les modules $\omega_{G^D,\tau}$ et $\omega_{G,\tau}$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, sont localement libres. Supposons que les dimensions de chacun des $\omega_{G,\tau}, \omega_{G^D,\tau}, \tau \in \mathcal{I}$, soient constantes sur la base S . On définit alors la signature de G par la donnée $(p_\tau, q_\tau)_\tau$, où,

$$p_\tau = \text{rg}_{\mathcal{O}_S} \omega_{G,\tau} \quad \text{et} \quad q_\tau = \text{rg}_{\mathcal{O}_S} \omega_{G^D,\tau}.$$

On a de plus,

$$p_\tau + q_\tau = \frac{\text{ht } G}{f} =: \text{ht}_{\mathcal{O}}(G) = h,$$

la \mathcal{O} -hauteur de G , qui est indépendante de τ . On note aussi $k_\tau = \sum_{\tau'} \max(q_\tau - q_{\tau'}, 0)$.

On va utiliser les décompositions précédentes pour construire des invariants de Hasse partiels, associés aux plongements $\tau \in \mathcal{I}$ (qui tiendront donc compte de l'action de \mathcal{O} sur G).

3. Le cas d'un corps parfait

On rappelle ici les constructions classiques de polygones associées à des cristaux, en restant le plus élémentaire possible. On rappelle aussi le travail de Mantovan-Viehmann sur la décomposition de Hodge-Newton (dans le cas simple d'un corps parfait) et on fait le lien avec la signature. Enfin, on donne une construction explicite de l'invariant μ -ordinaire (plus exactement des invariants partiels associés aux plongements τ) qui servira de fil conducteur dans la section suivante. Mis à part peut-être cette dernière partie, les résultats de cette section sont bien connus, mais plutôt que de renvoyer à de nombreux articles, et pour fixer les notations, on a préféré les réexposer ici.

3.1. Cristaux et polygones.— Supposons ici que $S = \text{Spec } k$, où k est un corps parfait de caractéristique p tel que $\kappa_F \subset k$ (mais on ne fixe pas de tel plongement). Supposons de plus que G/S est un groupe de Barsotti-Tate (non tronqué). Plutôt que de regarder son cristal de Dieudonné \mathcal{E} au sens de Berthelot-Breen-Messing, [BBM82], regardons son module de Dieudonné covariant au sens de Fontaine, [Fon77],

$$\mathbb{D}(G) = \text{Hom}(G^D, CW).$$

C'est un V -cristal au sens suivant,

Définition 3.1. — Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Un V^m -cristal sur k est un couple (M, V) , où M est un $W(k)$ -module libre de type fini, et

$$V : M \longrightarrow M,$$

est un morphisme injectif, Frob^{-m} -linéaire. On note Cris^m/k la catégorie des V^m -cristaux sur k . Un V^m -isocristal est un couple (M, V) où M est un $W(k)[\frac{1}{p}]$ -espace vectoriel et V est un isomorphisme Frob^{-m} -linéaire. En particulier, si (M, V) est un V^m -cristal, $(M[\frac{1}{p}], V)$ est un V^m -isocristal.

Notons $p - \text{Div}/k$ la catégorie des groupes p -divisibles sur k . Notons $\text{Cris}_{[0,1]}^1/k$ la catégorie des V -cristaux tels que $pM \subset VM \subset M$. D'après [Fon77], Chapitre III, on a le théorème suivant :

Théoreme 3.2. — *Le foncteur,*

$$\mathbb{D} : \begin{array}{ccc} p\text{-Div}/k & \longrightarrow & \text{Cris}_{[0,1]}^1/k \\ G & \rightsquigarrow & \mathbb{D}(G) \end{array}$$

est une équivalence de catégories telle que $\text{rg } \mathbb{D}(G) = \text{ht } G$ et $[\mathbb{D}(G) : V(\mathbb{D}(G))] = \dim G$. On a aussi,

$$\text{Lie}(G) = \omega_G^\vee \simeq \mathbb{D}(G)/V(\mathbb{D}(G)) \quad \text{et} \quad \omega_{G^D} \simeq V(\mathbb{D}(G))/p\mathbb{D}(G).$$

Le cristal de Dieudonné au sens de Fontaine est alors relié au cristal au sens de Berthelot-Breen-Messing par,

Proposition 3.3 ([BBM82] chapitre 4, Théorème 4.2.14). — *Soit G un groupe p -divisible tronqué d'échelon r sur k , un corps parfait de caractéristique p . Notons $\mathbb{D}(G)$ son module de Dieudonné covariant et $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^1(G^D, \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)/\text{Spec}(W(k))})$ son cristal de Dieudonné, et σ le Frobenius de k . On a alors,*

$$\mathcal{E}_{(W(k) \rightarrow k)} \simeq \mathbb{D}(G)^{(\sigma)}.$$

On a supposé que G était muni d'une action de \mathcal{O} , on a donc une action de \mathcal{O} sur $\mathbb{D}(G)$. Décomposons alors,

$$\mathbb{D}(G) = M = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} M_\tau, \quad \omega_G = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G,\tau} \quad \text{et} \quad \omega_{G^D} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} \omega_{G^D,\tau}.$$

Afin d'alléger les notations, on fixe un isomorphisme $\mathcal{I} \simeq \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} = \{1, \dots, f\}$ (on notera donc désormais i pour un élément de \mathcal{I}), tel que,

$$\forall i \in \mathcal{I}, \quad \text{Frob} \circ i = i + 1.$$

On a alors,

$$V : M_i \longrightarrow M_{i-1} \quad \text{et} \quad F : M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Notons,

$$\varphi_i = M_i \xrightarrow{V} M_{i-1} \xrightarrow{V} M_{i-2} \xrightarrow{V} \dots \xrightarrow{V} M_{i+1} \xrightarrow{V} M_i.$$

C'est à dire $\varphi_i = V_{|M_i}^f$. On a alors que (M_i, φ_i) est un V^f -cristal, pour tout $i \in \mathcal{I}$. De plus, F est une isogénie de $\text{Frob}^*(M_i, \varphi_i)$ vers (M_{i+1}, φ_{i+1}) , on en déduit donc que leurs isocristaux sont égaux, et donc que le polygone de Newton de (M_i, φ_i) ne dépend pas de $i \in \mathcal{I}$.

Définition 3.4. — On appelle polygone de Newton de G (ou de $\mathbb{D}(G)$) avec \mathcal{O} -action (ou encore \mathcal{O} -polygone de Newton), que l'on note $\text{Néwt}_{\mathcal{O}}(G)$ (ou $\text{Néwt}_{\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G))$), la fonction (réelle) convexe affine par morceaux définie sur $[0, h]$ ($h = \text{ht}_{\mathcal{O}}(G)$) par

$$\text{Néwt}_{\mathcal{O}}(G) = \frac{1}{f} \text{Néwt}(M_i, \varphi_i),$$

où $\text{Néwt}(M_i, \varphi_i)$ est la fonction affine par morceaux défini grâce aux pentes de la classification de Dieudonné-Manin des isocristaux.

Le polygone de Hodge qui encode la signature d'un groupe p -divisible, ne dépend que de la p -torsion de celui-ci. On peut le définir plus généralement pour un $W(k)$ -module de longueur finie N , et pour un cristal on choisira $N = M/V(M)$.

Définition 3.5. — Soit N un $W(k)$ -module de longueur finie. On appelle polygone de Hodge renversé de N , noté $\text{Hdg}^\diamond(N)$, le polygone concave à abscisses de ruptures entières (que l'on identifie à une fonction affine par morceaux sur $[0, +\infty[$), tel que,

$$\text{Hdg}^\diamond(N)(i) = \deg N - v(\text{Fitt}_i N), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Par exemple, si

$$N \simeq \bigoplus_{i=1}^n W(k)/p^{a_i} W(k), \quad a_1 \geq \dots \geq a_n,$$

Alors $\text{Hdg}^\diamond(N)$ commence en $(0, 0)$ et est de pente a_i sur $[i-1, i]$, et de pente 0 sur $[n, +\infty[$.

Proposition 3.6. — Soit M_1, M_2, M_3 trois $W(k)$ -modules libres de rang fini, et u, v deux morphismes (semi-linéaires vis-à-vis de $\sigma \in \text{Aut}(k)$),

$$M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3,$$

qui deviennent des isomorphismes après inversion de p (c'est à dire u, v injectifs et de conoyau de longueur finie). Alors,

$$\text{Hdg}^\diamond(\text{Coker}(v \circ u)) \leq \text{Hdg}^\diamond(\text{Coker } u) + \text{Hdg}^\diamond(\text{Coker } v).$$

Démonstration. — Choisissons des bases de M_1, M_2 et M_3 . Soit $i \in \mathbb{N}$. Les coefficients des matrices de $\bigwedge^i u, \bigwedge^i v$ et $\bigwedge^i(v \circ u)$ dans ces bases engendrent les idéaux $\text{Fitt}_i(\text{Coker } u), \text{Fitt}_i(\text{Coker } v)$ et $\text{Fitt}_i(\text{Coker } v \circ u)$. Mais comme $\bigwedge^i(v \circ u) = \bigwedge^i v \circ \bigwedge^i u$, on a,

$$\text{Hdg}^\diamond(\text{Coker}(v \circ u))(i) \leq \text{Hdg}^\diamond(\text{Coker } u)(i) + \text{Hdg}^\diamond(\text{Coker } v)(i).$$

□

Définition 3.7. — Soit (M, V) un V^m -cristal sur k de rang h , alors on définit son polygone de Hodge renversé par,

$$\text{Hdg}^\diamond(M, V) = \text{Hdg}^\diamond(M/V(M)).$$

On définit ensuite son polygone de Hodge $\text{Hdg}(M, V)$ comme le renversé de $\text{Hdg}^\diamond(M, V)|_{[0, h]}$, voir remarque qui suit.

Remarque 3.8. — Notons que le polygone de Hodge de (M, V) ne dépend pas uniquement de $M/V(M)$, contrairement à $\text{Hdg}^\diamond(M, V)$: on veut contrôler la pente 0 (qui correspond à la partie étale de G pour un groupe p -divisible), ce qui explique l'introduction de h dans la définition. C'est à dire, si les pentes (avec multiplicités, et éventuellement nulles) de $\text{Hdg}^\diamond(M, V) = \text{Hdg}^\diamond(M/V(M))$ sont $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r \geq \underbrace{0 \geq \dots \geq 0}_{h-r \text{ fois}}$, celles de $\text{Hdg}(M)$ sont $0 \leq \dots \leq 0 \leq b_r \leq b_{r-1} \leq \dots \leq b_1$.

Cette normalisation est faite pour que l'on ne perde pas les pentes nulles lors du renversement de $\text{Hdg}(M, V)$.

Revenons à $\mathbb{D}(G)$. On a la décomposition, $\mathbb{D}(G) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{D}(G)_i$, et, par la proposition précédente,

$$\text{Hdg}^\diamond(\mathbb{D}(G)_i, \varphi_i) := \text{Hdg}^\diamond(\mathbb{D}(G)_i/V^f(\mathbb{D}(G)_i)) \leq \sum_{j \in \mathcal{I}} \text{Hdg}^\diamond(\mathbb{D}(G)_j/V(\mathbb{D}(G)_{j+1})).$$

De plus, on sait d'après l'inégalité de Mazur, cf [Kat79] Theorem 1.4.1, que,

$$(1) \quad \mathcal{N}\text{ewt}(\mathbb{D}(G)_i[\frac{1}{p}], \varphi_i[\frac{1}{p}]) \geq \text{Hdg}(\mathbb{D}(G)_i, \varphi_i) \geq \sum_{j \in \mathcal{I}} \text{Hdg}_j(\mathbb{D}(G), V),$$

où l'on note $\text{Hdg}_j(\mathbb{D}(G), V)$ le renversé de $\text{Hdg}^\diamond(\mathbb{D}(G)_j/V(\mathbb{D}(G)_{j+1}))|_{[0, h]}$.

Remarque 3.9. — Bien sûr, en general $\text{Hdg}_i(\mathbb{D}(G), V) \neq \text{Hdg}(\mathbb{D}(G)_i, V^f)$.

On en déduit donc que,

$$\mathcal{N}\text{ewt}_\mathcal{O}(\mathbb{D}(G)) \geq \frac{1}{f} \sum_{j \in \mathcal{I}} \text{Hdg}_j(\mathbb{D}(G), V).$$

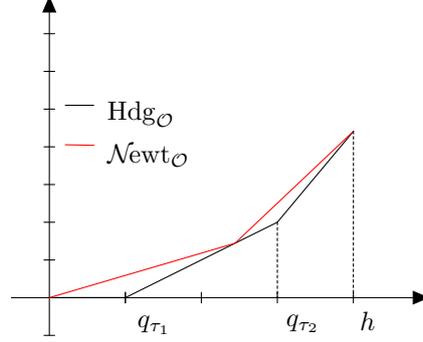
Définition 3.10. — Soit M un cristal sur $k \supset \kappa_F$ avec action de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$. On appelle \mathcal{O} -polygone de Hodge de M , le polygone,

$$\text{Hdg}_\mathcal{O}(M) = \frac{1}{f} \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{Hdg}_i(M, V).$$

Si G est un groupe p -divisible sur $k \supset \kappa_F$ avec action de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$, on appelle \mathcal{O} -polygone de Hodge de G , noté $\text{Hdg}_\mathcal{O}(G)$, celui de $\mathbb{D}(G)$.

On retrouve donc la proposition classique suivante, voir aussi [RR96],

Proposition 3.11. — Le polygone de Newton $\mathcal{N}\text{ewt}_\mathcal{O}(G)$ est au-dessus du polygone de Hodge $\text{Hdg}_\mathcal{O}(G)$, et ils ont mêmes points terminaux.

Figure 1. Exemple de polygones de Hodge et Newton dans le cas de $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p^2$ 

On rappelle la définition suivante, cf.[Wed99] par exemple

Définition 3.12. — Soit $G/\text{Spec}(k)$ un \mathcal{O} -module p -divisible, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Il est dit μ -ordinaire si,

$$\text{Nwt}_{\mathcal{O}}(G) = \text{Hdg}_{\mathcal{O}}(G).$$

Soit G/S une famille de \mathcal{O} -module p -divisible sur une base S telle que $p\mathcal{O}_S = 0$, alors G est dit μ -ordinaire si pour tout point géométrique $x = \text{Spec}(k) \rightarrow S$, G_x est μ -ordinaire.

3.2. Rappels sur la décomposition de Hodge-Newton. — On rappelle dans cette section le résultat principal de [MV10]. Supposons maintenant que $\text{Nwt}_{\mathcal{O}}(M)$ et $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)$ se touchent en un point d'abscisse x_0 , et que cette abscisse soit une abscisse de rupture pour $\text{Nwt}_{\mathcal{O}}(M)$ (ce qui est par exemple le cas sur la figure 1). D'après les inégalités (1) il en est de même pour $\text{Nwt}(M_i, \varphi_i)$ et $\text{Hdg}(M_i, \varphi_i)$, $\forall i \in I$. On en déduit donc par le théorème de Katz sur la rupture Hodge-Newton (cf. [Kat79] Theorem 1.6.1), que,

$$M_i = M'_i \oplus M''_i, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

où M'_i, M''_i sont stables par V^f . Notons,

$$N_i = M_i[\frac{1}{p}], \quad N'_i = M'_i[\frac{1}{p}], \quad N''_i = M''_i[\frac{1}{p}].$$

Ce sont des isocristaux, et les pentes de N'_i (respectivement N''_i) correspondent à celles de N_i avant (respectivement après) le point de rupture d'abscisse x_0 , et donc les pentes de Newton de N'_i sont toutes strictement inférieures à celles de N''_i . Mais l'isogénie,

$$V : M_i[\frac{1}{p}] \rightarrow M_{i-1}[\frac{1}{p}],$$

envoie composantes isoclines sur composantes isoclines de mêmes pentes, donc,

$$V(N'_i \cap M_i) \subset N'_{i-1} \cap M_{i-1} \quad V(N''_i \cap M_i) \subset N''_{i-1} \cap M_{i-1}$$

et donc, $V(M'_i) \subset M'_{i-1}$ et $V(M''_i) \subset M''_{i-1}$. Notons alors,

$$M' = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M'_i \quad \text{et} \quad M'' = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M''_i.$$

Munis de V , ce sont des V -cristaux sur k .

Lemme 3.13. — Soit M', M'' deux V -cristaux sur k de rang r, s munis d'une action de \mathcal{O} . Alors pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$\text{Hdg}_i(M' \oplus M'', V) = \text{Hdg}_i(M', V) \star \text{Hdg}_i(M'', V),$$

où \star désigne la concaténation des polygones, i.e. réordonne les pentes par ordre croissant.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $V(M'_{i-1} \oplus M''_{i-1}) = VM'_{i-1} \oplus VM''_{i-1}$, et donc on peut écrire,

$$M'_i/VM'_{i-1} = \bigoplus_{i=1}^r W(k)/p^{a_i}W(k) \quad \text{et} \quad M''_i/VM''_{i-1} = \bigoplus_{i=1}^s W(k)/p^{b_i}W(k),$$

et

$$(M'_i \oplus M''_i)/V(M'_{i-1} \oplus M''_{i-1}) = \bigoplus_{i=1}^r W(k)/p^{a_i}W(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^s W(k)/p^{b_j}W(k).$$

de telle sorte que $r = \text{rg } M'$ et $s = \text{rg } M''$ (i.e. on fait apparaître les pentes 0). Le polygone de Hodge associé à i de $M' \oplus M''$ est alors donné (par ses pentes) en réordonnant de manière croissante l'ensemble $\{a_i, b_j : i, j\}$. \square

En particulier, $\text{Hdg}_i(M' \oplus M'')(r) \leq \text{Hdg}_i(M')(r)$, avec égalité si et seulement si les polygones coïncident sur $[0, r]$.

On en déduit en particulier le théorème suivant, voir aussi [MV10],

Théorème 3.14 (Mantovan-Viehmann). — *Soit (M, V) un cristal sur k muni d'une action de \mathcal{O} . Alors si $\mathcal{N}_{\text{ewt}_{\mathcal{O}}}(M)$ et $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)$ se touchent en un point d'abscisse x qui est un point de rupture pour $\mathcal{N}_{\text{ewt}_{\mathcal{O}}}(M)$, alors il existe des sous-cristaux M' et M'' munis de la \mathcal{O} -structure induite de M tels que,*

$$M = M' \oplus M''.$$

De plus les pentes de Newton (respectivement de Hodge) de M' (respectivement de M'') correspondent à celles de M avant (respectivement après) le point d'abscisse x , et $\text{rg } M' = x$.

Démonstration. — L'assertion sur la décomposition et les polygones de Newton découle de précédemment. Pour les polygones de Hodge, le lemme précédent nous assure que pour tout i , $\text{Hdg}_i(M, V)$ a ses pentes constituées de celles de $\text{Hdg}_i(M', V)$ et $\text{Hdg}_i(M'', V)$, malheureusement ce n'est plus vrai pour $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M, V)$ (voir un contre exemple en section 7). Néanmoins comme $\mathcal{N}_{\text{ewt}_{\mathcal{O}}}(M)$ et $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)$ ont même points terminaux pour tout M , en appliquant cela à M' on en déduit que $\sum_i \text{Hdg}_i(M)(x) = \sum_i \text{Hdg}_i(M')(x)$, or comme pour tout i le lemme précédent nous assure que $\text{Hdg}_i(M)(x) \leq \text{Hdg}_i(M')(x)$ on en déduit l'égalité pour tout i , et donc l'égalité des polygones pour tout i , sur $[0, x]$. En particulier, $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)_{[0, x]} = \text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M')$, ainsi que la proposition associée pour M'' . \square

On en déduit directement que si G est un groupe de Barsotti-Tate sur k , muni d'une action de \mathcal{O} , alors si son \mathcal{O} -polygone de Newton et son \mathcal{O} -polygone de Hodge se touchent en un point d'abscisse $x \in \mathbb{Z}$, qui est un point de rupture du polygone de Newton, alors on a une décomposition,

$$G = G_1 \times G_2,$$

où G_1, G_2 sont deux groupes de Barsotti-Tate sur k , munis d'une action de \mathcal{O} , tels que

$$\text{ht } G_1 = x.$$

Remarque 3.15. — La réciproque est bien sûr fautive : voir l'exemple 7.1. C'est à la base de quelques complications quant à la compatibilité des invariants de Hasse au produit.

Remarque 3.16. — Supposons que nous sommes sous les hypothèses du théorème 3.14, pour $M = \mathbb{D}(G)$ associé à un groupe p -divisible (donc M est un V -cristal). Essayons de décrire les signatures de $M' = \mathbb{D}(G')$ et $M'' = \mathbb{D}(G'')$ en fonction de celle de M . Réordonnons les abscisses de ruptures du polygone de Hodge (moyenné) de M , $\text{Hdg}_{\mathcal{O}_F}(M)$,

$$\{q_{\tau} : \tau \in \mathcal{I}\} = \{q^{(1)} < q^{(2)} < \dots < q^{(r)}\},$$

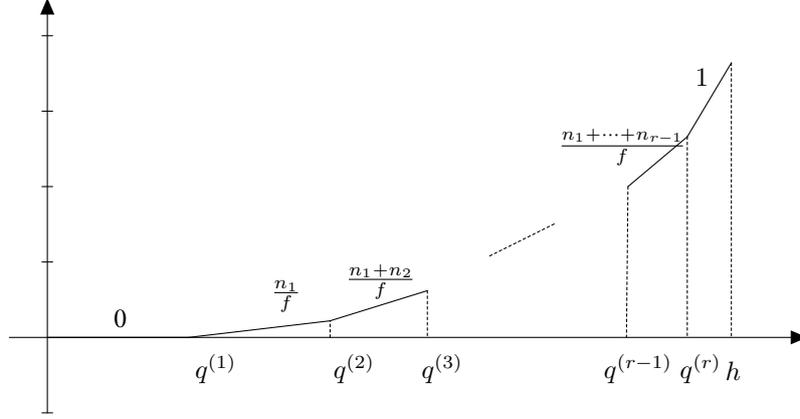
et pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, notons n_i la multiplicité de l'abscisse $q^{(i)}$, c'est à dire,

$$n_i := \text{Card}\{\tau \in \mathcal{I} : q_{\tau} = q^{(i)}\}.$$

Le \mathcal{O} -polygone de Hodge de M est alors le polygone sur $[0, \text{ht}_{\mathcal{O}}(M)]$ défini par les abscisses de ruptures $q^{(i)}, i \in \{1, \dots, r\}$, et dont la pente entre $q^{(i)}$ et $q^{(i+1)}$, notée ν_i , est,

$$\nu_i = \frac{n_1 + \dots + n_i}{f}.$$

Voir figure 2. Si $q^{(1)} > 0$ alors la pente sur $[0, q^{(1)}]$ est nulle, et si $q^{(r)} < \text{ht}_{\mathcal{O}}(M)$, la pente sur $[q^{(r)}, \text{ht}_{\mathcal{O}}(M)]$ est 1.

Figure 2. \mathcal{O} -polygone de Hodge associée à la signature $(q_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$.


On sait par ailleurs que le polygone de Hodge de M' est celui de M entre les abscisses $[0, x]$. On sait aussi que,

$$\omega_M = \omega_{M'} \oplus \omega_{M''}.$$

On en déduit les égalités suivantes, où on note (q'_τ) et (q''_τ) les signatures de M' et M'' ,

$$q_\tau = q'_\tau + q''_\tau, \quad \{q'_\tau : \tau \in \mathcal{I}\} = \{q_\tau : \tau \in \mathcal{I}, q_\tau \leq x\},$$

et, pour tout i tel que $q^{(i)} < x$,

$$\text{Card}\{\tau : q'_\tau = q^{(i)}\} = \text{Card}\{\tau : q_\tau = q^{(i)}\} = n_i.$$

On en déduit donc simplement par récurrence sur $i \in \{1, \dots, r\}$ que,

$$\forall \tau \in \mathcal{I}, \quad q'_\tau = \begin{cases} q_\tau & \text{si } q_\tau \leq x \\ x & \text{sinon} \end{cases}, \quad q''_\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } q_\tau \leq x \\ q_\tau - x & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3. Construction d'invariants dans le cas d'un point. — Le but de cet article, est de construire des invariants qui vont "mesurer" le défaut d'avoir un point de contact (entre les polygones de Hodge et Newton) en une abscisse donnée. On commence par présenter dans cette section la construction dans le cas particulier, à la fois plus simple et plus parlant, d'un corps parfait k de caractéristique p . Soit $(M, V) = \mathbb{D}(G)$ le cristal au sens de Fontaine d'un k -groupe p -divisible G , muni d'une action de \mathcal{O} , et on suppose $\kappa_F \subset k$. On rappelle que l'on a noté $\mathcal{I} = \text{Hom}(\kappa_F, k) \simeq \{1, \dots, f\}$ sur lequel on a "un ordre" induit par le Frobenius, et que,

$$M \simeq \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} M_i, \quad V : M_i \longrightarrow M_{i-1}.$$

On a aussi $f = \text{Card}(\mathcal{I})$, et des entiers h, p_i, q_i , pour $i \in \mathcal{I}$ et $h = p_i + q_i$.

Remarque 3.17. — Afin de faire la lien avec la section suivante, remarquons que l'on a l'égalité,

$$VM_{i+1} = \text{Ker}(M_i \longrightarrow M_i/V(M_{i+1}) \simeq \omega_{G,i}^\vee) \subset M_i.$$

Considérons $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)$ le \mathcal{O} -polygone de Hodge. Ses abscisses de ruptures sont,

$$\{q_i : i \in \mathcal{I}, q_i \notin \{0, f\}\} \subset]0, n[\cap \mathbb{N}.$$

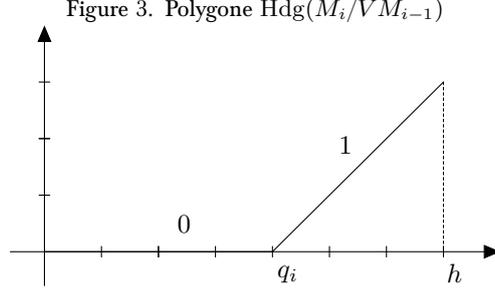
En effet, chaque $\text{Hdg}_i(M, V)$ a pour seul point de rupture q_i , car

$$M_i/V(M_{i+1}) = \omega_{G,i}^\vee \simeq (W(k)/pW(k))^{p_i},$$

voir figure 3.

Choisissons $q_i, i \in \mathcal{I}$, une abscisse de rupture, et posons

$$k_i = \sum_{j: q_j \leq q_i} (q_i - q_j).$$



L'ordonnée sur $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)$ du point de rupture d'abscisse q_i est k_i/f . En effet,

$$\begin{aligned} \text{Hdg}_{\mathcal{O}}(M)(q_i) &= \frac{1}{f} \sum_{j \in \mathcal{I}} \text{Hdg}(M_j/VM_{j-1})(q_i) \\ &= \frac{1}{f} \left(\sum_{q_j \leq q_i} \underbrace{\text{Hdg}(M_j/VM_{j-1})(q_i)}_{q_i - q_j} + \sum_{q_j > q_i} \underbrace{\text{Hdg}(M_j/VM_{j-1})(q_i)}_0 \right) = \frac{k_i}{f}. \end{aligned}$$

On a alors le lemme suivant,

Lemme 3.18. — Si $q_i < q_{i_0}$, alors comme réseaux dans $\bigwedge^{q_{i_0}} M_i[\frac{1}{p}]$,

$$\bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i+1} \subset p^{q_{i_0} - q_i} \bigwedge^{q_{i_0}} M_i.$$

Cela découle du lemme d'algèbre linéaire suivant (voir la démonstration de la proposition 4.6),

Lemme 3.19. — Soit A un anneau, et M un A -module, muni d'une filtration à un cran, c'est-à-dire un sous-module $N \subset M$. On a une filtration sur $\bigwedge^n M$, compatible à la précédente, donnée par,

$$\forall 0 < i \leq n, \text{Fil}^i \left(\bigwedge^n M \right) = \text{Im} \left(\bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} M \longrightarrow \bigwedge^n M \right).$$

Il existe alors une application surjective,

$$\bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} M / N \longrightarrow \text{Gr}^i \left(\bigwedge^n M \right).$$

De plus, c'est un isomorphisme si M est projectif de type fini et N est localement facteur direct.

Démonstration. — On vérifie directement que l'application surjective,

$$\bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} M \longrightarrow \text{Gr}^i \left(\bigwedge^n M \right),$$

se factorise par,

$$\bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} M / N \longrightarrow \text{Gr}^i \left(\bigwedge^n M \right).$$

Si de plus (localement) M est libre, et N un sous-module facteur direct, $M = N \oplus N'$, alors

$$\text{Gr}^i \left(\bigwedge^n M \right) = \text{Im} \left(\bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} N' \longrightarrow \bigwedge^n M \right) \simeq \bigwedge^i N \otimes \bigwedge^{n-i} N'.$$

□

Corollaire 3.20. — *L'application,*

$$V^f : \bigwedge^{q_{i_0}} M_{i_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1},$$

est divisible par $p^{k_{i_0}}$, c'est à dire se factorise par,

$$p^{k_{i_0}} \bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1}.$$

Comme VM_{i_0+1} est libre sur $W(k)$, qui est sans p -torsion, on en déduit une factorisation,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_{i_0}} M_{i_0} & \xrightarrow{V^f} & \bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1} \\ & \searrow \zeta_0 & \nearrow p^{k_{i_0}} \\ & \bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1} & \end{array}$$

On vérifie de plus que l'application ζ_0 envoie bien,

$$\text{Ker} \left(\bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1} \longrightarrow \bigwedge^{q_{i_0}} VM_{i_0+1} / pM_{i_0} \simeq \bigwedge^{q_{i_0}} \omega_{G^D, i_0} \right),$$

dans lui même. On en déduit une application Frob^{-f} -linéaire,

$$\widetilde{\text{Ha}}_{i_0} : \bigwedge^{q_{i_0}} \omega_{G^D, i_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{i_0}} \omega_{G^D, i_0}.$$

C'est-à-dire une application linéaire,

$$\widetilde{\text{Ha}}_{i_0} : \bigwedge^{q_{i_0}} \omega_{G^D, i_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{i_0}} \omega_{G^D, i_0}^{(p^f)} \simeq (\det \omega_{G^D, i_0})^{\otimes p^f},$$

Définition 3.21. — On appelle *Invariant de Hasse partiel de G en i_0* la section,

$$\widetilde{\text{Ha}}_{i_0}(G) \in \det(\omega_{G^D, i_0})^{\otimes (p^f - 1)},$$

associée au morphisme précédent.

L'invariant de Hasse ainsi défini mesure bien le défaut de contact des polygones de Hodge et Newton en l'abscisse q_{i_0} , au sens de la proposition suivante.

Proposition 3.22. — *Soit G un groupe p -divisible comme précédemment, et $i \in \mathcal{I}$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes,*

1. *Les polygones $\text{Newt}_{\mathcal{O}}(G)$ et $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(G)$ ont un point de contact en l'abscisse q_i .*
2. *L'invariant de Hasse partiel, $\widetilde{\text{Ha}}_i(G)$, est inversible.*

Démonstration. — Notons $K = W(k)[\frac{1}{p}]$. On a

$$\text{Newt}_{\mathcal{O}}(G) = \frac{1}{f} \text{Newt}(M_i \otimes K, V^f).$$

D'après Katz, cf [Kat79] 1.3.4, $\text{Newt}_{\mathcal{O}}(G)$ a un point de rupture en l'abscisse q_i qui touche le polygone $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(G)$, si et seulement si, l'isocrystal,

$$\left(\bigwedge^{q_i} M_i \otimes K, p^{-k_i} V^f \right),$$

a une pente 0 avec multiplicité non nulle. Notons

$$\Lambda = \left(\bigwedge^{q_i} VM_{i-1}, p^{-k_i} V^f \right),$$

qui est un réseau (un cristal) dans $(\bigwedge^{q_i} M_i \otimes K, p^{-k_i} V^f)$, et écrivons,

$$\Lambda = \Lambda^{et} \oplus \Lambda^{nilp}.$$

Il suffit de vérifier que $\Lambda^{et} \neq 0$ si et seulement si $\widetilde{\text{Ha}}_i$ est inversible. On a la suite exacte,

$$0 \longrightarrow \text{Im} \left(pM_i \otimes \bigwedge^{q_i-1} VM_{i-1} \longrightarrow \bigwedge^{q_i} VM_{i-1} \right) \longrightarrow \underbrace{\bigwedge^{q_i} VM_{i-1}}_{\Lambda} \xrightarrow{\pi} \bigwedge^{q_i} VM_{i-1}/pM_i \longrightarrow 0.$$

Notons $N = \text{Ker } \pi$ le premier module. Le module quotient est de dimension 1 sur k , et le morphisme semi-linéaire $p^{-k_i} V^f = \varphi$ qui agit dessus n'est autre que $\widetilde{\text{Ha}}_i$. Or on sait que (par exemple par la remarque 4.8, mais on peut le déduire facilement du lemme 3.18),

$$\varphi(N) \subset p\Lambda,$$

et donc $N \subset \Lambda^{nilp}$, et $\pi(\Lambda^{et})$ est un sous-module de

$$\bigwedge^{q_i} VM_{i-1}/pM_i,$$

sur lequel $\varphi = \widetilde{\text{Ha}}_i$ est inversible. Or ce dernier espace est un k -espace vectoriel de dimension 1, donc $\widetilde{\text{Ha}}_i$ est inversible si et seulement si $\Lambda^{et} \neq 0$. \square

4. Construction dans le cas d'une base lisse

Soit comme dans l'introduction $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ non ramifié, et G/S un \mathcal{O} -module p -divisible tronqué d'échelon r , on suppose cette fois de plus que S est un schéma lisse sur $\text{Spec}(\kappa_F)$, de caractéristique p , tel que les dimensions des modules localement libres $\omega_{G,\tau}$ et $\omega_{G^D,\tau}$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, soient constantes sur S .

On se place dans le topos cristallin (Zariski) $(S/\Sigma)_{Cris}$, où $\Sigma = \text{Spec}(W(\kappa_F))$. Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^1(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$ le cristal de Dieudonné de G , c'est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^r$ -module localement libre de rang fini (cf. [BBM82] Théorème 3.3.10).

Définition 4.1. — Les faisceaux cristallins $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ et $J_{S/\Sigma}$ vérifient, pour tout objet (U, T, γ) de $Cris(S/\Sigma)$,

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma}(U, T, \gamma) = \mathcal{O}_T, \quad \text{et} \quad J_{S/\Sigma}(U, T, \gamma) = \text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_U).$$

On a un morphisme de topos $i_{S/\Sigma} : S_{Zar} \rightarrow (S/\Sigma)_{Cris}$ où S_{Zar} est le topos Zariski de S , défini par, pour tout $\mathcal{F} \in (S/\Sigma)_{Cris}$, pour tout $\mathcal{G} \in S_{Zar}$ et pour tous ouverts $U \subset S$, $(U, T, \gamma) \in Cris(S/\Sigma)$,

$$i_{S/\Sigma}^* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U, U, 0) \quad \text{et} \quad i_{S/\Sigma,*} \mathcal{G}(U, T, \gamma) = \mathcal{G}(U).$$

On a alors la suite exacte,

$$0 \longrightarrow J_{S/\Sigma} \longrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma} \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \mathcal{O}_S \longrightarrow 0.$$

On obtient donc une suite exacte,

$$0 \longrightarrow J_{S/\Sigma} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \left(i_{S/\Sigma}^* \mathcal{E} \right).$$

Comme \mathcal{E} est un cristal, on a

$$i_{S/\Sigma,*} \left(i_{S/\Sigma}^* \mathcal{E} \right) \simeq \mathcal{E}/J_{S/\Sigma} \mathcal{E}.$$

Mais maintenant, on a une filtration (cf [BBM82] Corolaire 3.3.5) de \mathcal{O}_S -modules,

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow \mathcal{E}_{(S \xrightarrow{\text{id}} S)} \longrightarrow \omega_G^\vee \longrightarrow 0.$$

On en déduit donc une filtration (cf [BBM82], Corolaire 3.3.5),

$$0 \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \omega_{G^D} \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \left(i_{S/\Sigma}^* \mathcal{E} \right) \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \omega_G^\vee \longrightarrow 0.$$

Définition 4.2. — On définit la filtration de \mathcal{E} comme étant le sous-faisceau sur le site cristallin,

$$\text{Fil } \mathcal{E} = \text{Ker}(\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/J_{S/\Sigma} \mathcal{E} \longrightarrow i_{S/\Sigma,*} \omega_G^\vee).$$

Cette filtration vérifie que,

$$(\mathcal{E}/\text{Fil } \mathcal{E})_{(S \rightarrow S)} = \omega_G^\vee \quad \text{et} \quad (\text{Fil } \mathcal{E})_{(S \rightarrow S)} = \omega_{G^D}.$$

On a aussi grâce à l'action de \mathcal{O} sur G , des filtrations induites,

$$\text{Fil } \mathcal{E}_\tau \subset \mathcal{E}_\tau$$

qui vérifient,

$$(\mathcal{E}_\tau/\text{Fil } \mathcal{E}_\tau)_{(S \rightarrow S)} = \omega_{G,\tau}^\vee \quad \text{et} \quad (\text{Fil } \mathcal{E}_\tau)_{(S \rightarrow S)} = \omega_{G^D,\tau}.$$

On va construire les invariants de Hasse partiels comme sections de certains fibrés en droites, de manière analogue à la construction de l'invariant de Hasse classique d'un groupe p -divisible, telle qu'elle est par exemple décrite dans [Far11], section 2.2. On renvoie également à [GN13] pour une construction analogue dans le cas μ -ordinaires sur les variétés de Shimura. On s'intéresse donc à l'application $\bigwedge^{q_\tau} V^f$, que l'on note plutôt V^f ,

$$V^f : \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)}.$$

Dans le but de relier cela à la construction décrite dans la section 3.3, introduisons les sous-faisceaux cristallins,

$$\begin{aligned} \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \right) &= \text{Im} \left(\bigwedge^{q_\tau} \text{Fil } \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \right), \\ \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \right) &= \text{Im} \left(\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \right)^{(p^f)} \longrightarrow \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \right). \end{aligned}$$

Lemme 4.3. — Soit $\tau \in \mathcal{I}$. L'application

$$V : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau}^{(p)},$$

se factorise en,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau & \xrightarrow{V} & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau}^{(p)} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} (\text{Fil } \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} (\mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)} \right) & \end{array}$$

Définition 4.4. — Soit S, R deux anneaux et $S \twoheadrightarrow R$ un épaissement à puissances divisées. Supposons que $pR = 0$. Soit $\varphi : S \rightarrow S$ un morphisme. On dit que φ est un *relèvement fort* de Frobenius si $\varphi(s) \equiv s^p \pmod{p}$. En particulier φ relève (faiblement) le Frobenius de R , au sens où le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\text{Frob}_R} & R \end{array}$$

Exemple 4.5. — Si $R = k$ un corps parfait de caractéristique p , et $S = W(k)$, d'idéal $J_{S/R} = (p)$, le Frobenius σ de S est un relèvement fort de Frobenius.

Si $C = \widehat{\mathbb{Q}_p}$, $R = \mathcal{O}_C/p$ et $S = A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_C)$, $\theta : A_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C/p$ d'idéal $\ker \theta$, qui n'est pas p -adique, mais le Frobenius φ de A_{cris} est un relèvement fort de Frobenius.

Si $R = k$ un corps parfait de caractéristique p , et $S = k[T]/(T^p)$ muni de ses puissances divisées canoniques, alors $\varphi : S \rightarrow S$ tel que $\varphi(x) = x^p$ pour $x \in k$ et $\varphi(T) = T$, n'est pas un relèvement fort de Frobenius sur S .

À partir de maintenant on fixe un $\tau_0 \in \mathcal{I}$.

Proposition 4.6. — Si $q_\tau < q_{\tau_0}$, alors,

$$\mathrm{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \right) \subset J_{S/\Sigma}^{q_{\tau_0}-q_\tau} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau.$$

Si de plus (U, T, γ) est un ouvert qui est un épaissement p -adique, ou bien tel qu'il existe $\varphi : T \rightarrow T$ un relèvement fort de Frobenius, alors,

$$\mathrm{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} (\mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau)_{(U, T, \gamma)}^{(p)} \longrightarrow \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \right)_{(U, T, \gamma)}^{(p)} \right) \subset p^{q_{\tau_0}-q_\tau} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \right)_{(U, T, \gamma)}^{(p)}.$$

Démonstration. — On utilise le fait précédent, 3.19, qui se transpose aux faisceaux cristallins : soit $(U \hookrightarrow T) \in \mathrm{Cris}(S/\Sigma)$, alors on a un morphisme surjectif,

$$\bigwedge^i J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau(U \hookrightarrow T) \otimes_{\mathcal{O}_T} \bigwedge^{n-i} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau(U \hookrightarrow T) / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau(U \hookrightarrow T) \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}^i \left(\bigwedge^n (\mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau)_{(U \hookrightarrow T)} \right)$$

par le fait 3.19. Or le foncteur faisceau associé est un foncteur exact, [SGA72], 4.4.1, donc, dans $\mathcal{O}_{S/\Sigma}\text{-Mod}$, on a un épimorphisme,

$$\bigwedge^i J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \otimes_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}} \bigwedge^{n-i} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}^i \left(\bigwedge^n (\mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau) \right).$$

Appliquons alors cela avec $n = q_{\tau_0}$ et $0 \leq i < q_{\tau_0} - q_\tau$ (i.e. $q_{\tau_0} \geq q_{\tau_0} - i > q_\tau$). On a l'isomorphisme,

$$\mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \simeq i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau}.$$

On en déduit donc,

$$\bigwedge^{q_{\tau_0}-i} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \simeq \bigwedge^{q_{\tau_0}-i} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau} \simeq i_{S/\Sigma*} \bigwedge^{q_{\tau_0}-i} \omega_{G^D, \tau} = 0,$$

car $q_{\tau_0} - i > q_\tau = \dim_{\mathcal{O}_S} \omega_{G^D, \tau}$. Tous les gradués considérés sont donc nuls, et on en déduit,

$$\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau = \mathrm{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}-q_\tau} J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \otimes_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}} \bigwedge^{q_\tau} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau \right)$$

et donc, en prenant l'image dans $\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau$,

$$\mathrm{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \right) = \mathrm{Im} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}-q_\tau} J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_\tau \otimes_{\mathcal{O}_{S/\Sigma}} \bigwedge^{q_\tau} \mathrm{Fil} \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau \right) \subset J_{S/\Sigma}^{q_{\tau_0}-q_\tau} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau.$$

Soit (U, T, γ) un ouvert de $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$. Si l'épaissement est p -adique, alors $J_{S/\Sigma}(U, T, \gamma) = p\mathcal{O}_T$ et donc la seconde assertion découle de précédemment (même sans tordre par le Frobenius de S). Supposons donc qu'il existe φ sur \mathcal{O}_T qui relève fortement le Frobenius, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{O}_T$, $\varphi(x) \equiv x^p \pmod{p\mathcal{O}_T}$. Or si $x \in J_{S/\Sigma}(U, T, \gamma)$, alors $x^p = p! \gamma_p(x)$. Donc si $x \in J_{S/\Sigma}(U, T, \gamma)$, alors $\varphi(x) \in p\mathcal{O}_T$, on en déduit donc le résultat en tordant par φ la première assertion. \square

Corollaire 4.7. — L'application

$$V^f : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \mathrm{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)$$

est divisible par $p^{k_{\tau_0}}$ sur les épaissements (U, T, δ) , p -adiques ou munis d'un relèvement fort de Frobenius au sens de la proposition précédente, où,

$$k_{\tau_0} = \sum_{q_\tau < q_{\tau_0}} q_{\tau_0} - q_\tau.$$

C'est-à-dire que son image est incluse dans

$$p^{k_{\tau_0}} \mathrm{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)_{(U, T, \delta)}.$$

Démonstration. — Considérons la décomposition suivante du morphisme V^f ,

$$\begin{array}{ccccccc} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0} & \xrightarrow{V} & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau_0}^{(p)} & \xrightarrow{V} & \dots & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\sigma^{-f+1}\tau_0}^{(p^{f-1})} & \xrightarrow{V} & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \\ \downarrow & \nearrow V & \downarrow & \nearrow V & & \downarrow & \nearrow V & \downarrow \\ \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} & & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau_0}^{(p)} & & \dots & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\sigma^{-f+1}\tau_0}^{(p^{f-1})} & & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \end{array}$$

De plus, d'après la proposition précédente, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$ tel que $q_\tau < q_{\tau_0}$, la flèche verticale se factorise en fait sur les ouverts considérés, par,

$$\bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_\tau^{(p^r)} \longrightarrow p^{q_{\tau_0}-q_\tau} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_\tau^{(p^r)}.$$

La commutativité des triangles est donnée par la proposition 4.3. On en déduit donc que l'application V^f sur $\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}$, se factorise sur les ouverts (U, T, δ) comme dans l'énoncé, par

$$V^f : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow p^{k_{\tau_0}} \text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)}.$$

□

Remarque 4.8. — En fait on a montré un peu plus fort, c'est-à-dire que sur ces ouverts l'application

$$V^{f-1} : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^{f-1})} \right),$$

est divisible par $p^{k_{\tau_0}}$.

Théorème 4.9. — Supposons S lisse et $r > k_{\tau_0}$. Il existe une unique application entre faisceaux cristallins,

$$\varphi_{\tau_0} : \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) \otimes \mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) \otimes \mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^{r-k_{\tau_0}},$$

telle que $p^{k_{\tau_0}} \varphi_{\tau_0}$ s'étende en l'application V^f , modulo p^r , de la remarque précédente.

Démonstration. — Il suffit de prouver l'existence et l'unicité de φ_{τ_0} localement, l'unicité locale impliquera alors automatiquement que la construction se recolle, et donc l'existence globale. Supposons S affine (et lisse) sur Σ_1 , alors il existe un carré cartésien,

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \text{lisse} \\ \text{Spec}(\kappa_F) & \longrightarrow & \Sigma \end{array}$$

où $S_\infty \longrightarrow \Sigma = \text{Spec}(W(\kappa_F))$ est lisse (comme S est affine lisse, cela découle de [FGI⁺05], Theorem 8.5.9 et du théorème de Serre sur l'annulation de la cohomologie cohérente des schéma affines). Notons $S_r = S_\infty \times \text{Spec}(W(\kappa_F)/p^r)$. Par lissité de S_r , $p^{r-1}\mathcal{O}_{S_r} \neq 0$, et l'épaississement $(S \hookrightarrow S_\infty)$ est p -adique.

D'après [BO78] Théorème 6.6, considérons (M, ∇) le \mathcal{O}_{S_∞} -module à connexion associé à $\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}$, c'est à dire,

$$M = \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right)_{(S \hookrightarrow S_\infty)}.$$

C'est un \mathcal{O}_{S_r} -module localement libre, car G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué de rang r (cf. [BBM82] Théorème 3.3.10). Le morphisme

$$V^f : M \longrightarrow M^{(p^f)}$$

est divisible par $p^{k_{\tau_0}}$, d'après le corollaire 4.7, donc il existe

$$\psi : M \longrightarrow M^{(p^f)} \quad \text{tel que } p^{k_{\tau_0}} \psi = V^f.$$

De plus, ψ est unique modulo $p^{r-k_{\tau_0}}$ car $M^{(p^f)}$ est localement libre sur \mathcal{O}_{S_r} . Et pour que ψ donne un morphisme de cristaux, il faut qu'il soit compatible aux connexions de M et $M^{(p^f)}$. Or il l'est après multiplication par $p^{k_{\tau_0}}$, et M est localement libre sur \mathcal{O}_{S_r} , donc ψ est compatible aux connexions au moins après réduction modulo $p^{r-k_{\tau_0}}$, c'est-à-dire que,

$$\bar{\psi} : M/p^{r-k_{\tau_0}} M \longrightarrow M^{(p^f)}/p^{r-k_{\tau_0}} M^{(p^f)}$$

est compatible aux connexions. On en déduit donc, toujours par [BO78] Théorème 6.6, un unique morphisme de cristaux,

$$\bar{\psi} : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}/p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)}/p^{r-k_{\tau_0}}.$$

Lemme 4.10. — *Le morphisme précédemment construit,*

$$\bar{\psi} : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}/p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)}/p^{r-k_{\tau_0}},$$

se factorise (à l'arrivée) par,

$$\varphi_{\tau_0} : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}/p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}}.$$

Démonstration. — Malheureusement le faisceau cristallin par lequel on veut factoriser n'est pas un cristal, on va donc montrer la factorisation sur chaque épaissement $(U \hookrightarrow T, \delta)$ de $\text{Cris}(S/\Sigma)$. La factorisation est vraie pour V^f , d'après le corollaire 3.3. De plus pour l'épaississement à puissances divisées $(S \hookrightarrow S_{\infty})$ d'idéal $p\mathcal{O}_{S_{\infty}}$,

$$\left(\text{Fil} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})} \quad \text{et} \quad \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})},$$

ne sont pas des \mathcal{O}_{S_r} -modules localement libres, mais on peut diviser comme précédemment, d'après le corollaire 4.7 et la remarque 4.8, le morphisme de cristaux,

$$V^{f-1} : \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right)_{(S \hookrightarrow S_r)} \longrightarrow \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^{f-1})} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})},$$

par $p^{k_{\tau_0}}$, car $\left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^{f-1})} \right)$ est un cristal, et en composant avec la flèche, cf proposition 4.3,

$$V : \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^{f-1})} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})} \longrightarrow \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})},$$

on obtient un morphisme entre les espaces désirés,

$$(\varphi_{\tau_0})_{(S \hookrightarrow S_{\infty})} : \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}/p^{r-k_{\tau_0}} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})} \longrightarrow \left(\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})}.$$

De plus si on compose ce dernier morphisme par,

$$\left(\text{Fil} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})} \subset \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right)_{(S \hookrightarrow S_{\infty})},$$

et par l'unicité de $\bar{\psi}$, on en déduit que $\bar{\psi}_{(S \hookrightarrow S_{\infty})}$ se factorise comme voulu.

Mais maintenant soit $(U \hookrightarrow T, \delta)$ un épaissement quelconque de $\text{Cris}(S/\Sigma)$ avec U et T affines. Comme S_{∞} est lisse, il existe un morphisme u s'insérant dans le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & T \\
 \downarrow & & \downarrow u \\
 S & \longrightarrow & S_\infty \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \Sigma
 \end{array}$$

Par propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées (qui est ici S_∞ puisque cet espace est lisse sur Σ), on a que u est un morphisme dans $\text{Cris}(S/\Sigma)$. Comme $\bar{\psi}$ est un morphisme de cristal, il vérifie que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc}
 (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0})_{(U \hookrightarrow T)} / p^{r-k_{\tau_0}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_{(U \hookrightarrow T)}} & (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(U \hookrightarrow T)} / p^{r-k_{\tau_0}} \\
 \rho'_u \uparrow \simeq & & \rho'_u \uparrow \simeq \\
 u^* (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0})_{(S \hookrightarrow S_\infty)} / p^{r-k_{\tau_0}} & \xrightarrow{u^* \bar{\psi}} & u^* (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(S \hookrightarrow S_\infty)} / p^{r-k_{\tau_0}}
 \end{array}$$

Mais on vient de montrer qu'on peut factoriser la flèche du bas, et donc on en déduit une factorisation,

$$\begin{array}{ccccc}
 (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0})_{(U \hookrightarrow T)} & \xrightarrow{\varphi_{\tau_0(U \hookrightarrow T), u}} & (\text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(U \hookrightarrow T)} & \xrightarrow{i_T} & (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(U \hookrightarrow T)} \\
 \rho'_u \uparrow \simeq & & \rho_u \uparrow & & \rho'_u \uparrow \simeq \\
 u^* (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0})_{(S \hookrightarrow S_\infty)} & \xrightarrow{u^* \varphi_{\tau_0(S \hookrightarrow S_\infty)}} & u^* (\text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(S \hookrightarrow S_\infty)} & \xrightarrow{u^* i_{S_\infty}} & u^* (\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)})_{(S \hookrightarrow S_\infty)}
 \end{array}$$

telle que $i_T \circ \varphi_{\tau_0(U \hookrightarrow T), u} = \bar{\psi}_{(U \hookrightarrow T)}$ ne dépend pas de u . Or i_T est un monomorphisme, donc $\varphi_{\tau_0(U \hookrightarrow T), u}$ ne dépend pas du choix du morphisme

$$u : T \longrightarrow S_r,$$

et donc factorise $\bar{\psi}_{(U, T, \delta)}$. □

Il reste donc à montrer que pour tout morphisme

$$f : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}},$$

tel que le relevé de $p^{k_{\tau_0}} f$ modulo p^r soit V^f , alors après composition avec,

$$i : \left(\text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \subset \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} / p^{r-k_{\tau_0}} \right),$$

$i \circ f$ est le morphisme $\bar{\psi}$. Mais par hypothèse $i \circ p^{k_{\tau_0}} f = p^{k_{\tau_0}} i \circ f$ est un morphisme de cristaux, donc,

$$i \circ f : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} / p^{r-k_{\tau_0}},$$

est un morphisme de cristaux (par [BO78] Théorème 6.6, comme précédemment) qui divise V^f . C'est donc $\bar{\psi}$. Comme i est un monomorphisme, cela conclut. □

Remarque 4.11. — L'unicité va être centrale dans la suite, elle nous permettra de voir que φ_{τ_0} (et donc dans la suite $\widetilde{\text{Ha}}_{\tau}$) vérifie toutes les compatibilités désirées.

Dans le cas où G/S est un groupe p -divisible (non tronqué), tous les modules sont des \mathbb{Z}_p -modules libres, et on a bien existence et unicité d'une application,

$$\varphi_{\tau_0} : \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right),$$

vérifiant que $p^{k_{\tau_0}} \varphi_{\tau_0} = V^f$.

On voudrait voir φ_{τ_0} comme une application sur $\bigwedge^{q_{\tau_0}} \omega_{G^D, \tau_0}$, pour cela notons ζ_{τ_0} la restriction de φ_{τ_0} à $\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right)$, et considérons,

$$\text{Fil}_2^{\tau_0} = \text{Ker} \left(\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \xrightarrow{\pi} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0} \right),$$

et notons

$$\text{Fil}_2^{\tau_0, (p^f)} = \text{Ker} \left(\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \xrightarrow{\pi} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right).$$

Vérifions tout d'abord que ζ_{τ_0} passe bien au quotient par ces sous-modules :

Proposition 4.12. — *Le morphisme cristallin défini précédemment,*

$$\zeta_{\tau_0} : \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}},$$

passé au quotient par les sous modules $\text{Fil}_2^{\tau_0}$ et $\text{Fil}_2^{\tau_0, (p^f)}$, c'est à dire que,

$$\zeta_{\tau_0}(\text{Fil}_2^{\tau_0}) \subset \text{Fil}_2^{\tau_0, (p^f)}.$$

Démonstration. — Par le théorème précédent, il existe un morphisme cristallin,

$$\varphi_{\tau_0} : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / p^{r-k_{\tau_0}} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}},$$

qui prolonge ζ_{τ_0} et tel que $p^{k_{\tau_0}} \varphi_{\tau_0} = V^f$. Regardons le sous-module,

$$\text{Ker} \left(\left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \xrightarrow{\pi} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) = \text{Im} \left(J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0} \otimes \bigwedge^{q_{\tau_0}-1} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \right).$$

L'application V^f est divisible par $p^{k_{\tau_0}}$, on a donc que l'application φ_{τ_0} restreinte à ce noyau est d'image dans,

$$J_{S/\Sigma} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} = \text{Ker} \left(\left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right) / p^{r-k_{\tau_0}} \xrightarrow{\pi} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} \right),$$

donc nulle après projection dans $\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)} / J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)}$. Donc

$$\zeta_{\tau_0}(\text{Fil}_2^{\tau_0}) \subset \text{Fil}_2^{\tau_0, (p^f)}.$$

□

Avant de conclure, réécrivons plus simplement ces quotients.

Lemme 4.13. — *On a un isomorphisme,*

$$\text{Fil} \left(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \right) / \text{Fil}_2^{\tau_0} \simeq \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma}^* \omega_{G^D, \tau_0}.$$

Remarque 4.14. — On a la même chose pour $\mathcal{E}_{\tau_0}^{(p^f)}$ en appliquant le lemme à $G^{(p^f)}$.

Démonstration. — On a une suite exacte,

$$0 \longrightarrow J_{S/\Sigma} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0} \longrightarrow 0,$$

on en déduit donc une flèche,

$$\bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0} \longrightarrow 0.$$

Il faut d'abord voir que cette flèche se factorise par,

$$\text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}.$$

Or on a une suite exacte,

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} / J_{S/\Sigma*} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0}^{\vee} \longrightarrow 0.$$

En effet, cette suite est exacte pour tout épaissement $(U \hookrightarrow T) \in \text{Cris}(S/\Sigma)$ car $\omega_{G^D, \tau_0} \otimes \mathcal{O}_U$ est localement facteur direct de $\mathcal{E}_{\tau_0, (U \xrightarrow{id} U)}$. Et par définition de $\text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0}$ on a un carré commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0} & \hookrightarrow & \bigwedge^{q_{\tau_0}} (\mathcal{E}_{\tau_0} / J_{S/\Sigma*} \mathcal{E}_{\tau_0}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0} & \longrightarrow & \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \end{array}$$

Donc l'application cherchée se factorise bien,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \text{Fil } \mathcal{E}_{\tau_0} & \longrightarrow & \bigwedge^{q_{\tau_0}} i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau_0} \\ & \searrow & \uparrow \pi \\ & \text{Fil}(\bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0}) & \end{array}$$

Il reste à déterminer le noyau de π , mais le carré commutatif précédent nous dit que le noyau de π est exactement,

$$\text{Ker} \left(\text{Fil } \bigwedge^{q_{\tau_0}} \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} (\mathcal{E}_{\tau_0} / J_{S/\Sigma*} \mathcal{E}_{\tau_0}) \right),$$

c'est à dire $\text{Fil}_2^{\tau_0}$. □

Grâce à tout ce qui précède, on a donc construit une application "de Hasse" associée à $\tau_0 \in \mathcal{I}$, qui provient de ζ_{τ_0} par passage au quotient,

$$\widetilde{\text{Ha}}_{\tau_0}(G) : i_{S/\Sigma*} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \omega_{G^D, \tau_0} \longrightarrow i_{S/\Sigma*} \bigwedge^{q_{\tau_0}} \omega_{G^D, \tau_0}^{(p^f)}.$$

Or le foncteur $i_{S/\Sigma*}$ est pleinement fidèle, cf [BO78] 5.19, on en déduit donc un morphisme de \mathcal{O}_S -modules,

$$\widetilde{\text{Ha}}_{\tau_0}(G) : \bigwedge^{q_{\tau_0}} \omega_{G^D, \tau_0} \longrightarrow \bigwedge^{q_{\tau_0}} \omega_{G^D, \tau_0}^{(p^f)}.$$

Proposition 4.15. — Soit G/S un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon r (et supposons toujours S lisse). Soit $\tau \in \mathcal{I}$. Supposons donné,

$$r > s > k_{\tau}.$$

Alors $G[p^s]$ est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $s < r$, et

$$\widetilde{\text{Ha}}_{\tau}(G[p^s]) = \widetilde{\text{Ha}}_{\tau}(G).$$

Démonstration. — Notons $G' := G[p^s]$, et d'après [BBM82] Théorème 3.3.3, on a,

$$\mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \otimes \mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^s.$$

C'est donc un $\mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^s$ -module localement libre, et le carré de cristaux suivant est commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau & \xrightarrow{V^f} & \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau^{(p^f)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau & \xrightarrow{V^f} & \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau^{(p^f)} \end{array}$$

Remarquons aussi que S étant de caractéristique p , canoniquement,

$$\omega_{G^D} = \omega_{G'^D}.$$

Mais d'après le théorème 4.9, il existe une unique application,

$$\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau \pmod{p^s} \xrightarrow{\varphi_\tau(G')} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau^{(p^f)} \pmod{p^{s-k_\tau}},$$

qui divise V^f . Donc $\varphi_\tau(G') = \varphi_\tau(G) \pmod{p^{s-k_\tau}}$. Il suffit ensuite de remarquer que la flèche,

$$\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau \rightarrow i_{S/\Sigma*} \bigwedge^{q_\tau} \omega_{G^D, \tau},$$

ainsi que ses variantes tordues par Frobenius, se factorise par,

$$\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau \rightarrow \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}xt_{S/\Sigma}^1(G', \mathcal{O}_{S/\Sigma})_\tau.$$

□

Définition 4.16. — Soit G/S un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon

$$r > \max_{\tau \in \mathcal{I}} k_\tau.$$

Si $\tau \in \mathcal{I}$ est tel que

$$q_\tau = \dim_S \omega_{G^D, \tau} = 0,$$

on pose alors,

$$\det(\omega_{G^D, \tau}) = \mathcal{O}_S, \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) = \text{id}.$$

On définit l'*invariant de Hasse partiel*, associé à $\tau \in \mathcal{I}$, de G/S , par,

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) \in \Gamma(S, \det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes (p^f - 1)}),$$

donné par le morphisme $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G)$ précédent, sous l'identification,

$$\det(\omega_{G^D, \tau}^{(p^f)}) = \det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes p^f}.$$

On appelle *μ -invariant de Hasse* la section produit des sections $\text{Ha}_\tau(G)$, pour $\tau \in \mathcal{I}$, c'est à dire,

$${}^\mu \widetilde{\text{Ha}}(G) = \bigotimes_{\tau \in \mathcal{I}} \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) \in \Gamma(S, \det(\omega_{G^D})^{\otimes (p^f - 1)}).$$

D'après la proposition 4.15, cette définition est bien cohérente, et ne dépend que de la p^s -torsion de G , où,

$$s = \max_{\tau \in \mathcal{I}} k_\tau + 1.$$

Remarque 4.17. — Dans le cas où la base S est une variété de Hilbert-Siegel (modulo un p de bonne réduction), et A est la variété abélienne universelle, on a aussi des invariants de Hasse partiels, donnés par les sections (cf. [AG04] par exemple),

$$V_\tau \in \Gamma(S, \det(\omega_{A, \sigma^{-1}\tau}^{\otimes p} \otimes \omega_{A, \tau}^{\otimes (-1)}))$$

car les q_τ sont tous égaux. Mais ces invariants de Hasse partiels sont différents de ceux défini dans cet article : on a la relation (comme tous les q_τ sont égaux, $k_\tau = 0$),

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(A[p^\infty]) = V_\tau \otimes V_{\sigma^{-1}\tau}^{\otimes p} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma^f\tau}^{\otimes p^{f-1}}.$$

En particulier l'invariant de Hasse partiel $\widetilde{\text{Ha}}_\tau$ est "moins précis" que V_τ , et il n'est pas réduit dans ce cas.

5. Descente au corps réflexe

Considérons maintenant un schéma S/κ_F de caractéristique p , et G/S un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon r muni d'une action de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$, et de signature $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$ donnée. Sans donner plus de précision, supposons r assez grand (au sens de la section précédente) pour les constructions utilisées aient du sens.

Définition 5.1. — Soit κ_E le plus petit sous-corps de κ_F qui laisse invariante la signature, c'est-à-dire tel que, $\forall \theta \in \text{Gal}(\kappa_F/\kappa_E), \forall \tau \in \mathcal{I}$,

$$q_{\tau \circ \theta} = q_\tau.$$

Cela nous fixe un plongement, $\kappa_E \longrightarrow \kappa_F$. On suppose qu'en plus, S et G descendent à κ_E , c'est à dire, qu'il existe S_0/κ_E , et un groupe p -divisible (tronqué) muni d'une action de \mathcal{O} , noté G_0 sur S_0 , tel que,

$$S = S_0 \otimes_{\kappa_E} \kappa_F \quad \text{et} \quad G_0 \times_{S_0} S = G,$$

et l'action sur G est donnée par extension des scalaires par celle de G_0/S_0 .

Sur S , c'est à dire associé à G , on a construit $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G)$ pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. On voudrait montrer qu'en fait on peut redescendre la construction de l'invariant de Hasse μ -ordinaire à S_0 . Soit alors $\theta \in \text{Gal}(\kappa_F/\kappa_E)$, et notons,

$$G^{(\theta)} = G \otimes_{\kappa_F, \theta} \kappa_F = G \times_S (S \otimes_{\kappa_F, \theta} \kappa_F).$$

On a naturellement des isomorphismes,

$$\rho_\theta : G^{(\theta)} \xrightarrow{\simeq} G,$$

qui induisent des isomorphismes,

$$\mathcal{E}_\theta := \mathcal{E}xt_{S^{(\theta)}/\sigma}^1(G^{(\theta), D}, \mathcal{O}_{S^{(\theta)}/\sigma}) \simeq \theta^* \mathcal{E}xt_{S/\sigma}^1(G^D, \mathcal{O}_{S/\sigma}) = \theta^* \mathcal{E}.$$

ainsi que,

$$\omega_{G^{(\theta)}} \simeq \theta^* \omega_G \quad \text{et} \quad \omega_{G^{(\theta), D}} = \theta^* \omega_{G^D}.$$

Et donc grâce à l'isomorphisme ρ_θ , on en déduit des isomorphismes,

$$\theta^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}, \quad \theta^* \omega_G \simeq \omega_G \quad \text{et} \quad \theta^* \omega_{G^D} \simeq \omega_{G^D}.$$

Malheureusement, a priori, les composantes correspondant à $\tau \in \mathcal{I}$ ne sont pas préservées par torsion par θ (et donc le fibré sur S , $\omega_{G^D, \tau}$, ne redescend pas a priori à S_0). Mais on a des isomorphismes,

$$(\omega_{G^{(\theta)}})_\tau = (\theta^* \omega_G)_\tau \simeq \theta^* (\omega_{G, \tau \circ \theta}) \quad \text{et} \quad (\omega_{G^{(\theta), D}})_\tau = (\theta^* \omega_{G^D})_\tau \simeq \theta^* (\omega_{G^D, \tau \circ \theta}).$$

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = h$. Il est alors naturel de considérer,

$$\omega_{G, a} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}, q_\tau = a} \omega_{G, \tau} \quad \text{et} \quad \omega_{G^D, b} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}, q_\tau = b} \omega_{G^D, \tau}.$$

Les isomorphismes précédents induisent alors des isomorphismes,

$$\theta^* (\omega_{G, a}) \simeq \omega_{G, a} \quad \text{et} \quad r_\theta : \theta^* (\omega_{G^D, b}) \simeq \omega_{G^D, b}.$$

De plus ceux-ci sont compatibles à la condition de cocycle. En effet, c'est le cas de ω_G et ω_{G^D} , puisque ces derniers proviennent de S_0 , et donc c'est le cas de $\omega_{G,a}$ et $\omega_{G^D,b}$ par restriction. On en déduit par descente galoisienne qu'ils redescendent en des modules localement libres $\omega_{G_0,a}$ et $\omega_{G_0^D,b}$ sur S_0 !

Proposition 5.2. — *Les morphismes de faisceaux sur S , pour tout $q \in \{q_\tau, \tau \in \mathcal{I}\}$,*

$$\bigotimes_{\tau \in \mathcal{I}, q_\tau = b} \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) : \bigotimes_{\tau \in \mathcal{I}, q_\tau = b} \det(\omega_{G^D, \tau}) \longrightarrow \bigotimes_{\tau \in \mathcal{I}, q_\tau = b} \det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes p^f},$$

proviennent canoniquement de morphismes sur S_0 , notés,

$$\widetilde{\text{Ha}}_b(G_0) : \det(\omega_{G_0^D, b}) \longrightarrow \det(\omega_{G_0^D, b})^{\otimes p^f}.$$

En particulier l'invariant de Hasse μ -ordinaire provient d'un morphisme sur S_0 ,

$$\widetilde{\mu} \text{Ha}(G_0) : \det(\omega_{G_0^D}) \longrightarrow \det(\omega_{G_0^D})^{\otimes p^f}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G^{(\theta)}) = \theta^* \widetilde{\text{Ha}}_{\theta \circ \tau}(G)$ comme morphismes sur S , c'est à dire, que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \det(\omega_{G^D, \tau}) & \xrightarrow{\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G^{(\theta)})} & \det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes p^f} \\ \uparrow \cong \scriptstyle r_\theta & & \uparrow \cong \scriptstyle r_\theta^{\otimes p^f} \\ \theta^* \det(\omega_{G^D, \tau \theta}) & \xrightarrow{\theta^* \widetilde{\text{Ha}}_{\theta \circ \tau}(G)} & \theta^* \det(\omega_{G^D, \tau \theta})^{\otimes p^f} \end{array}$$

Or on a un isomorphisme $r_\theta : \theta^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$, dont on déduit aussi que,

$$\text{Fil } \theta^* \mathcal{E} = \theta^*(\text{Fil } \mathcal{E}),$$

Et idem avec application des opérateurs \bigwedge , quotients, etc... De même,

$$(\theta^* \mathcal{E})_\tau = \theta^*(\mathcal{E}_{\theta \circ \tau}),$$

et idem avec application de Fil , \bigwedge , et/ou quotients, etc... De plus, si σ dénote le Frobenius de F , on a évidemment que $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$, on en déduit que le carré,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_\tau & \xrightarrow{V} & \mathcal{E}_{\sigma^{-1} \circ \tau}^{(p)} \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \theta^*(\mathcal{E}_{\tau \theta}) & \xrightarrow{\theta^* V} & \theta^*(\mathcal{E}_{\tau \theta \sigma^{-1}})^{(p)} = \theta^*(\mathcal{E}_{\tau \sigma^{-1} \theta})^{(p)} \end{array}$$

commute, et de même on a le carré commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau & \xrightarrow{V^f} & \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ \theta^*(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_{\tau \theta}) & \xrightarrow{\theta^* V^f} & \theta^*(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_{\tau \theta})^{(p^f)} \end{array}$$

Mais par la proposition (4.9) il existe une unique application,

$$\varphi_\tau : \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau / p^{r-k_\tau} \longrightarrow \text{Fil} \left(\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \right) / p^{r-k_\tau},$$

qui, multipliée par p^{k_τ} , se relève en V^f . Or c'est aussi le cas de $\theta^* \varphi_{\tau \theta}$, où $\varphi_{\tau \theta}$ est l'application associée à G et au plongement $\tau \theta$, donc on en déduit que,

$$\varphi_\tau = \theta^* \varphi_{\tau \theta}.$$

Étant donné que $\widetilde{\text{Ha}}_\tau$ s'en déduit par restriction et quotient (et que ces opérations commutent avec θ^*) on en déduit que le premier diagramme commute, et donc que $\widetilde{\text{Ha}}_q(G)$ descend comme une section sur S_0 ,

$$\widetilde{\text{Ha}}_b(G_0) \in H^0 \left(S_0, \det \left(\omega_{G_0^D, b} \right)^{\otimes (p^f - 1)} \right).$$

□

6. Changement de Base

Soit S, S' deux schémas lisses sur $\text{Spec}(\kappa_E)$, et un morphisme,

$$\pi : S' \longrightarrow S.$$

Soit G/S un groupe de Barsotti-Tate, muni d'une action de \mathcal{O} , de signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$. On a défini son invariant de Hasse partiel (associé à une abscisse q) comme un morphisme,

$$\widetilde{\text{Ha}}_b(G) : \det(\omega_{G^D, b}) \longrightarrow \det(\omega_{G^D, b})^{\otimes p^f},$$

ou de manière équivalente comme une section sur S de $\det(\omega_{G^D, b})^{\otimes (p^f - 1)}$. Maintenant on peut se demander si cette construction est compatible au changement de base, c'est-à-dire si on note $G' = G \times_S S'$, peut-on relier son invariant de Hasse à celui de G ?

Théorème 6.1. — *La construction de l'invariant de Hasse partiel est fonctorielle (ou encore compatible au changement de base), c'est-à-dire que l'on a l'égalité,*

$$\widetilde{\text{Ha}}_b(G') = \pi^* \widetilde{\text{Ha}}_b(G).$$

Démonstration. — En fait cela découle simplement de la compatibilité au changement de base du cristal de Dieudonné,

$$\mathbb{D}(G \times_S S') = \pi_{CRIS}^* \mathbb{D}(G).$$

On peut supposer (par la propriété de descente du chapitre si dessus) que quitte à étendre les scalaires à κ_F , S et S' sont des $\text{Spec}(\kappa_F)$ -schémas. De même, il est formel que $V_{G'}, F_{G'}$ sur le cristal précédent soit les tirées en arrière par π_{CRIS} de V, F sur $\mathbb{D}(G)$, et l'unicité de la décomposition suivant l'action de \mathcal{O} assure que,

$$\mathbb{D}(G')_\tau = \pi_{CRIS}^* \mathbb{D}(G)_\tau, \quad \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

De plus, la formation de ω_G est compatible au changements de base ([BBM82] p134), et donc comme $\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau$ est défini par son image dans $\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau$, celui-ci est compatible au changement de base (bien que ce ne soit pas le cas pour $\text{Fil} \mathcal{E}$ à priori, mais $\text{Im}(\pi_{CRIS}^* \text{Fil} \mathcal{E} \longrightarrow \pi_{CRIS}^* \mathcal{E}) = \text{Fil} \pi_{CRIS}^* \mathcal{E}$). Dès lors, par l'unicité du théorème 4.9 (avec les mêmes notations), on a que $\varphi_\tau(G') = \pi_{CRIS}^* \varphi_\tau(G)$, et donc

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G') = \pi^* \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G), \quad \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

□

Remarque 6.2. — Cette fonctorialité est encore vraie pour Ha_τ , pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, dès lors que S, S' sont au-dessus de κ_F , comme le montre la démonstration.

On en déduit alors la proposition suivante,

Proposition 6.3. — *Soit S un κ_F -schéma lisse. Soit G/S un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon r . Si $\tau \in \mathcal{I}$ est un plongement tel que $q_\tau = \text{ht}_{\mathcal{O}}(G)$, et*

$$r > k_\tau,$$

alors $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G)$ est une section inversible.

Démonstration. — Supposons $q_\tau = \text{ht}_{\mathcal{O}}(G)$, c'est à dire

$$i_{S/\Sigma*} \omega_{G^D, \tau} \xrightarrow{\simeq} i_{S/\Sigma*} \left(i_{S/\Sigma}^* \mathcal{E}_\tau \right) = \mathcal{E}_\tau / J_{S/\Sigma*} \mathcal{E}_\tau.$$

Il suffit de vérifier que $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G)$ est inversible en chaque point géométrique de S , par la proposition précédente. Supposons donc k algébriquement clos et G/k . Relevons alors le \mathcal{O} -module p -divisible tronqué G en un \mathcal{O} -module p -divisible (cf. [Wed01] Proposition 3.2), noté encore G . Comme $\text{Ha}_\tau(G)$ ne dépend que de sa $p^{k_\tau+1}$ torsion, on peut relier $\text{Ha}_\tau(G[p^r])$ à la section 3. Mais alors on utilise l'isomorphisme de [BBM82] Chapitre 4 (rappelé en 3.3),

$$\mathbb{D}(G)_{(W(k) \rightarrow k)} \simeq M(G)^{(\sigma)}.$$

Il suffit donc de travailler avec le module de Dieudonné $M(G)$, qui est un $W_r(k) = W(k)/p^r$ module libre. Mais un calcul direct de l'indice entre les deux réseaux, donne, comme $q_\tau = h$,

$$\begin{aligned} [M(G)_\tau : V^f(M(G)_\tau)] &= \sum_{i=1}^f [V^i(M(G)_{\sigma^{-i}\tau}) : V^{i+1}(M(G)_{\sigma^{-i-1}\tau})] \\ &= \sum_{i=1}^f p_{\sigma^{-i}\tau} \\ &= \sum_{i=1}^f h - q_{\sigma^{-i}\tau} \\ &= k_\tau \end{aligned}$$

Donc,

$$\left[\bigwedge^h M(G)_\tau : V^f \left(\bigwedge^h M(G)_\tau \right) \right] = k_\tau,$$

et donc si $\varphi_\tau = \frac{1}{p^{k_\tau}} V^f$, on obtient que φ_τ est surjective. Donc,

$$\varphi_\tau : \bigwedge^h \omega_{G^D, \tau} \xrightarrow{\simeq} \bigwedge^h \omega_{G^D, \tau}^{(p^f)}.$$

□

7. Compatibilité au produit

En général on ne peut pas espérer que les invariants de Hasse partiels précédemment définis soient compatibles au produit. C'est-à-dire que l'on n'a pas en général, comme le montre l'exemple suivant, pour G, G' deux groupes de Barsotti-Tate (tronqués ou non) avec action de \mathcal{O} , que,

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G \times G') = \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) \otimes \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G').$$

Exemple 7.1. — Soit k corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p^2$. Notons τ' et τ les plongements de \mathcal{O} dans $W(k)$. On décompose tous les cristaux sous la forme $M = M_{\tau'} \oplus M_\tau$ et on écrira les matrices en respectant cette décomposition. Soit G_1/k un groupe p -divisible donné par le cristal $(W(k)^4, V_1)$:

$$V_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right)$$

C'est-à-dire que G_1 est μ -ordinaire et

$$q_\tau^1 = 1, \quad q_{\tau'}^1 = 2, \quad \text{et} \quad \text{ht}_{\mathcal{O}}(G_1) = 2.$$

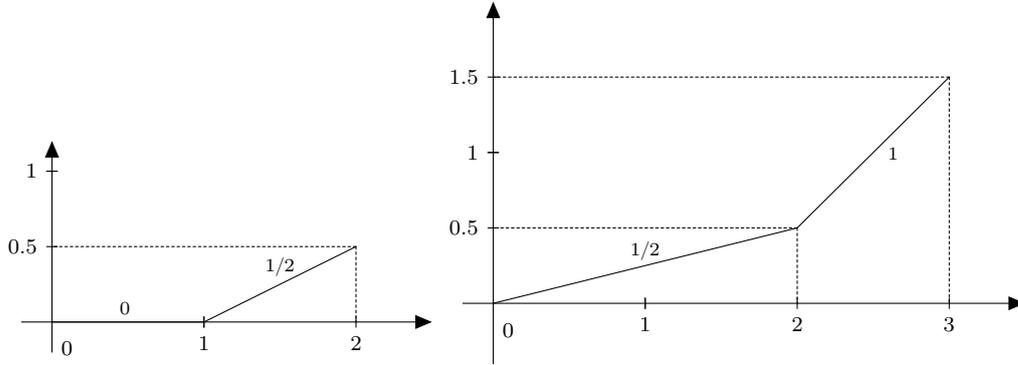
Soit aussi G_2 un groupe p -divisible sur k donné par le cristal $(W(k)^6, V_2)$,

$$V_2 = \begin{pmatrix} & & \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ 0 & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} & & 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que G_2 est μ -ordinaire et

$$q_\tau^2 = 2, \quad q_{\tau'}^2 = 0, \quad \text{et} \quad \text{ht}_{\mathcal{O}}(G_2) = 3.$$

Figure 4. \mathcal{O} -Polygones de Hodge et Newton de G_1 et G_2 .



On peut alors donner la matrice de Frobenius du cristal de $G_1 \times G_2$:

$$V = \begin{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & p \\ 0 & & p \end{pmatrix} \\ & 0 & \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & p & \\ & & 1 \\ 0 & & p \end{pmatrix} & & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier il n'est pas μ -ordinaire (voir la caractérisation de Moonen, théorème 8.11). D'ailleurs on le voit sur le calcul de (la valuation de) l'invariant de Hasse associé à τ :

$$\text{Ha}_\tau(G_1 \times G_2) = 1, \quad \text{Ha}_\tau(G_1) = \text{Ha}_\tau(G_2) = 0.$$

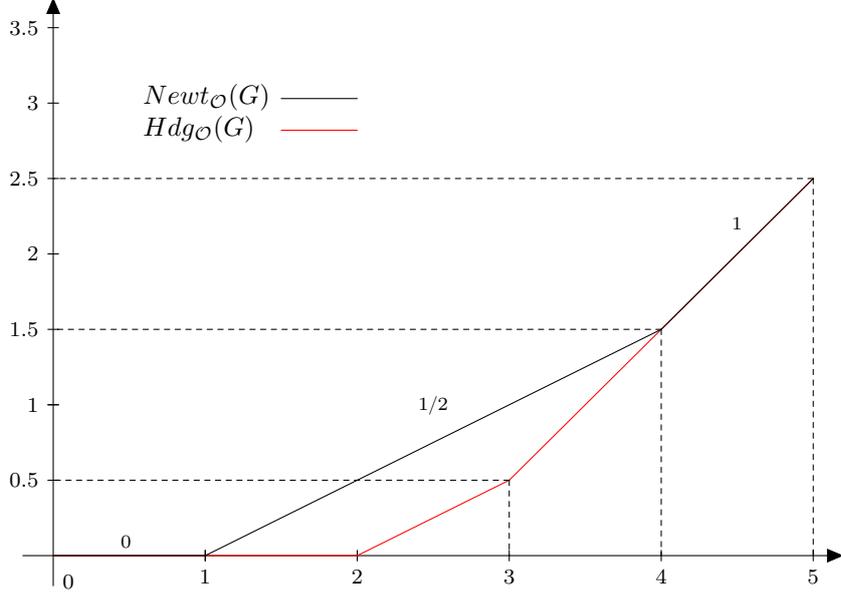
Mais on le voit aussi sur les polygones de Newton (figure 5).

Afin d'espérer avoir une égalité entre le μ -invariant d'un produit et le produit des μ -invariants, étant donné que ceux-ci impliquent tous deux de diviser par une bonne puissance de p , il est naturel de supposer que l'on divise par la même puissance. C'est à dire que si

$$G = G_1 \times G_2,$$

et que l'on note (q_τ) la signature de G , $(q_\tau^1), (q_\tau^2)$ celles de G_1 et G_2 , et pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, k_τ , (respectivement k_τ^1, k_τ^2) les puissances de p par lesquelles on divise dans la construction de l'invariant de Hasse associé à τ (cf théorème 4.9) de G (respectivement G_1, G_2). Alors une hypothèse raisonnable est que

$$k_\tau = k_\tau^1 + k_\tau^2.$$

Figure 5. \mathcal{O} -Polygones de Hodge et Newton de $G = G_1 \times G_2$.

Remarque 7.2. — Soit $G/\text{Spec}(k)$ un groupe p -divisible avec \mathcal{O} -action. Si les \mathcal{O} -polygones de Hodge et Newton de G se touchent en une abscisse x qui est un point de rupture pour le \mathcal{O} -polygone de Newton, on a alors par le théorème 3.14 de Mantovan-Viehmann, une décomposition de Hodge-Newton,

$$G = G_1 \times G_2.$$

Et d'après la remarque 3.16, on connaît les signatures de G_1 et G_2 , on en déduit donc que, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$,

$$k_\tau = k_\tau^1 + k_\tau^2.$$

Proposition 7.3. — Soit S un schéma lisse sur $\text{Spec}(\kappa_E)$. Soit G_1, G_2 deux groupes de Barsotti-Tate tronqués de rang r , munis d'une action de \mathcal{O} , et de signature $(p_\tau^1, q_\tau^1)_\tau$ et $(p_\tau^2, q_\tau^2)_\tau$. La signature de $G = G_1 \times G_2$ est alors donnée par,

$$p_\tau = p_\tau^1 + p_\tau^2, \quad \text{et} \quad q_\tau = q_\tau^1 + q_\tau^2, \quad \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

On fait l'hypothèse suivante,

$$k_\tau = \sum_{\tau' | q_{\tau'} \leq q_\tau} q_\tau - q_{\tau'} = k_\tau^1 + k_\tau^2.$$

Supposons $r > k_\tau^1 + k_\tau^2$. Notons $G = G_1 \times G_2$. Alors, quitte à étendre les scalaires de S , pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, on a un isomorphisme,

$$\det(\omega_{G^D, \tau}) \simeq \det(\omega_{G_1^D, \tau}) \otimes \det(\omega_{G_2^D, \tau}),$$

et sous cet isomorphisme,

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G_1 \times G_2) = \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G_1) \otimes \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G_2).$$

En particulier, si

$$k_\tau = k_\tau^1 + k_\tau^2, \quad \forall \tau \in \mathcal{I},$$

alors,

$$\widehat{\mu} \widetilde{\text{Ha}}(G_1 \times G_2) = \widehat{\mu} \widetilde{\text{Ha}}(G_1) \otimes \widehat{\mu} \widetilde{\text{Ha}}(G_2).$$

Démonstration. — Tout d'abord, quitte à faire un changement de base, supposons S au-dessus de κ_F . L'égalité,

$$\omega_G = \omega_{G_1} \oplus \omega_{G_2},$$

induit l'isomorphisme voulu,

$$\det(\omega_{G, \tau}) \simeq \det(\omega_{G_1, \tau}) \otimes \det(\omega_{G_2, \tau}).$$

Notons $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^1(G^D, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$ et $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2$ les cristaux en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^r$ -modules localement libres associés à G_1 et G_2 . On a alors,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^1 \oplus \mathcal{E}^2, \quad \text{et} \quad V := V_{\mathcal{E}} = V_{\mathcal{E}^1} \oplus V_{\mathcal{E}^2}.$$

On a alors les isomorphismes,

$$\bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \pmod{p^{r-k_\tau}} = \bigoplus_{j=0}^{q_\tau} \left(\bigwedge^j \mathcal{E}_\tau^1 \otimes \bigwedge^{q_\tau-j} \mathcal{E}_\tau^2 \right) \pmod{p^{r-k_\tau}},$$

et

$$\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \pmod{p^{r-k_\tau}} = \bigoplus_{j=0}^{q_\tau} \left(\text{Fil} \bigwedge^j \mathcal{E}_\tau^1 \otimes \text{Fil} \bigwedge^{q_\tau-j} \mathcal{E}_\tau^2 \right) \pmod{p^{r-k_\tau}}.$$

De plus, on a un diagramme commutatif de morphismes de cristaux,

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau & \xrightarrow{V^f} & \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \\ \downarrow \text{ } & & \downarrow \text{ } \\ \bigwedge^{q_\tau^1} \mathcal{E}_\tau^1 \otimes \bigwedge^{q_\tau^2} \mathcal{E}_\tau^2 & \xrightarrow{V_1^f \wedge V_2^f} & \bigwedge^{q_\tau^1} \mathcal{E}_\tau^{1,(p^f)} \otimes \bigwedge^{q_\tau^2} \mathcal{E}_\tau^{2,(p^f)} \end{array}$$

dont les cristaux sont des cristaux en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres, et dont les flèches horizontales sont divisibles par $p^{k_\tau} = p^{k_\tau^1} \cdot p^{k_\tau^2}$ par hypothèse, de manière unique modulo p^{r-k_τ} . On en déduit la commutativité du diagramme,

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau \pmod{p^{r-k_\tau}} & \xrightarrow{\varphi_\tau} & \text{Fil} \bigwedge^{q_\tau} \mathcal{E}_\tau^{(p^f)} \pmod{p^{r-k_\tau}} \\ \downarrow \text{ } & & \downarrow \text{ } \\ \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau^1} \mathcal{E}_\tau^1 \right) \otimes \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau^2} \mathcal{E}_\tau^2 \right) \pmod{p^{r-k_\tau}} & \xrightarrow{\varphi_\tau^1 \otimes \varphi_\tau^2} & \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau^1} \mathcal{E}_\tau^{1,(p^f)} \right) \otimes \left(\text{Fil} \bigwedge^{q_\tau^2} \mathcal{E}_\tau^{2,(p^f)} \right) \pmod{p^{r-k_\tau}} \end{array}$$

où les flèches $\varphi_\tau, \varphi_\tau^1, \varphi_\tau^2$ sont données par le théorème 4.9 appliqué à G (respectivement G_1, G_2). Mais en passant au quotient à $\omega_{G^D, \tau} = \omega_{G_1^D, \tau} \oplus \omega_{G_2^D, \tau}$, les monomorphismes verticaux deviennent des isomorphismes, on en déduit donc que,

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G) = \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G_1) \otimes \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G_2).$$

□

8. Cas d'une base quelconque : Champ des \mathcal{O} -modules tronqués et lieu μ -ordinaire.

Dans les sections précédentes, on a construit des invariants de Hasse partiels (et μ -ordinaire) associés à chaque groupe de Barsotti-Tate (muni d'une action de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$) sur une base lisse. On aimerait étendre la construction à tous les groupes de Barsotti-Tate avec \mathcal{O} -structure, quelque soit la base. Pour cela, il suffit de le faire pour le groupe de Barsotti-Tate universel sur le champ des \mathcal{O} -modules de Barsotti-Tate tronqués, c'est à dire associé au foncteur \mathcal{BT} qui à tout schéma S sur κ_E associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de \mathcal{O} -modules de Barsotti-Tate tronqués (d'échelon r). Malheureusement ce foncteur n'est pas représentable par un schéma, mais seulement par un champ. Par chance, ce champ est lisse. On peut donc construire grâce à la section précédente les invariants de Hasse partiels sur une présentation de celui-ci, et on aimerait ensuite descendre ces sections. C'est l'objet de cette partie et de l'appendice A.

Rappelons que l'on s'intéresse aux groupes de Barsotti-Tate tronqués, d'échelon disons r , munis d'une action de $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$, où F/\mathbb{Q}_p est une extension finie non ramifiée de degré f . Rappelons aussi que l'on a noté,

$$\mathcal{I} = \text{Hom}(\kappa_F, \overline{\mathbb{F}}_p) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p).$$

Notons $\mathcal{F} = \mathbb{N}^{\mathcal{I}}$ l'ensemble des applications de \mathcal{I} dans \mathbb{N} . Cet ensemble est naturellement muni d'une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ grâce à son action sur les plongements. Soit $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}} \in \mathcal{F}$ une telle application.

Définition 8.1. — On appelle *corps réflexe associé à* $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$ l'extension de \mathbb{Q}_p associée au sous-groupe stabilisateur de $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$. On le notera généralement E .

8.1. Descente au champ \mathcal{BT} . — On munit la catégorie $Sch/\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ de la topologie lisse. Notons $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O}}$ le champ sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon r , munis d'une action de \mathcal{O} . On peut alors décomposer ce champ en sous-champs ouverts, suivant la \mathcal{O} -hauteur,

$$\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O}} = \coprod_h \mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h}.$$

Définition 8.2. — Pour h fixé, étant donné une fonction $(p_\tau)_\tau$, on note $q_\tau = h - p_\tau$. On définit alors le sous-champ de $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h|Sch/\text{Spec}(\mathcal{O}/p)}$ suivant,

$$\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}},$$

qui a un schéma $S/\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O})$ associe les classes d'isomorphismes (G, ι) de S -groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon r , hauteur h , munis d'une action de \mathcal{O} , tels que,

$$\dim_{\mathcal{O}_S} \omega_{G,\tau} = p_\tau, \quad \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

Ce sous-champ descend naturellement à $\text{Spec}(\mathcal{O}_E/p\mathcal{O}_E)$ où E est le corps réflexe de $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$. Définissons aussi

$$X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)},$$

le champ sur $Sch/\text{Spec}(\mathcal{O}_E/p\mathcal{O}_E)$ qui à un schéma S associe les classes d'isomorphismes (G, ι, α) où (G, ι) est un objet de $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}(S)$ et α est une rigidification, i.e. un isomorphisme,

$$\alpha : \mathcal{O}_S^{p^{r,hf}} \xrightarrow{\simeq} \pi_*(\mathcal{O}_G),$$

où $\pi : G \rightarrow S$ est le morphisme structural.

On a une action de $GL_{p^{r,hf}}$ sur $X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}$, et un morphisme d'oubli, $GL_{p^{r,hf}}$ -équivariant,

$$X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)} \rightarrow \mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}.$$

D'après la proposition 1.8 de [Wed01], $X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}$ est représentable par un sous-schéma ouvert d'un schéma quasi-affine de type fini (et est donc quasi-affine de type fini) au-dessus de $\text{Spec}(\mathcal{O}_E)$. De plus, le morphisme précédent induit un isomorphisme,

$$[GL_{p^{r,hf}} \backslash X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}] \simeq \mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}.$$

Cela fait donc de $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}$ un champ algébrique, qui en plus est lisse d'après le corollaire 3.3 de [Wed01].

Remarque 8.3. — En fait il existe un champ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h}$ qui est aussi algébrique lisse ([Wed01]) dont le champ précédent est (un ouvert de) la réduction modulo p . À moins d'accepter de parler de champ formel sur $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$, on ne peut cependant pas découper le champ 'en caractéristique 0' selon la signature.

Pour la suite, on abrégera $X_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}$ en X et $\mathcal{BT}_{r,\mathcal{O},h,(p_\tau,q_\tau)}$ en \mathcal{BT}_r , en espérant que cela n'entraînera pas de confusion : tous les groupes de Barsotti-Tate considérés seront tronqués d'échelon r , de hauteur h , et auront pour signature (p_τ, q_τ) .

Soit $G \rightarrow \mathcal{BT}_r$ le groupe de Barsotti-Tate universel, muni d'une action de \mathcal{O} , et soit G' le produit fibré $G \times_{\mathcal{BT}_r} X$ qui est un schéma en groupe sur X , et même un Barsotti-Tate tronqué d'échelon r .

Théoreme 8.4. — Soit $q \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $\tau \in \mathcal{I}$ vérifiant $q = q_\tau$. Supposons $r > k_\tau$. Alors il existe sur le champ \mathcal{BT}_r un fibré en droite, noté

$$\det(\omega_{G,q})^{\otimes (p^f - 1)},$$

et une section globale $\widetilde{\text{Ha}}_q$ de ce faisceau sur \mathcal{BT}_τ , tel que pour tout $\text{Spec}(\kappa_E)$ -schéma U lisse, et tout U -groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon r G_u muni d'une action de \mathcal{O} , de \mathcal{O} -hauteur h , et de signature $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$, associé à un $u \in \mathcal{BT}_{rU}$, on ait la compatibilité avec la définition des sections précédentes,

$$\widetilde{\text{Ha}}_q(G_u) = u^* \widetilde{\text{Ha}}_q(G).$$

En particulier cela définit un invariant de Hasse partiel $\widetilde{\text{Ha}}_q$, associé à q , à tout groupe de Barsotti-Tate muni d'une \mathcal{O} -action, quelque soit la base, et donc un μ -invariant de Hasse ${}^\mu \widetilde{\text{Ha}}$, par produit.

Démonstration. — L'existence du faisceau quasi-cohérent $\det(\omega_{G,q})^{\otimes(p^f-1)}$ provient simplement de la fonctorialité de ce faisceau par changement de base, et du fait que G est l'objet universel. Maintenant on peut voir une section de ce faisceau comme un morphisme,

$$\widetilde{\text{Ha}}_q : \mathcal{O}_{\mathcal{BT}_\tau} \longrightarrow \det(\omega_{G,q})^{\otimes(p^f-1)}.$$

Par le lemme A.5, comme \mathcal{BT}_τ est un champ algébrique lisse, il suffit donc de voir que pour tout U lisse sur $\text{Spec}(\kappa_E)$, et tout $u \in \mathcal{BT}_{rU}$, il existe un morphisme,

$$(\widetilde{\text{Ha}}_q)_u : \mathcal{O}_U \longrightarrow u^* \det(\omega_{G,q})^{\otimes(p^f-1)} = \det(\omega_{u^*G,q})^{\otimes(p^f-1)},$$

vérifiant les compatibilités de la définition A.1. On a construit dans ce cas une section $\widetilde{\text{Ha}}_q(u^*G) \in \Gamma(U, \det(\omega_{u^*G,q})^{\otimes(p^f-1)})$, c'est-à-dire un morphisme,

$$\widetilde{\text{Ha}}_q(u^*G) : \mathcal{O}_U \longrightarrow u^* \det(\omega_{G,q})^{\otimes(p^f-1)}.$$

La compatibilité pour $U' \xrightarrow{f} U$, provient de la compatibilité au changement de base de $\widetilde{\text{Ha}}_q$ pour une base lisse, c'est à dire du théorème 6.1, qui assure la commutativité du diagramme,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U'} & \xrightarrow{\widetilde{\text{Ha}}_q((u \circ f)^*G)} & \det(\omega_{(u \circ f)^*G,q})^{\otimes(p^f-1)} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ f^* \mathcal{O}_U & \xrightarrow{f^* \widetilde{\text{Ha}}_q(u^*G)} & f^* \det(\omega_{u^*G,q})^{\otimes(p^f-1)} \end{array}$$

□

8.2. Un exemple : les \mathcal{O} -modules de Lubin-Tate et groupes p -divisibles μ -ordinaires. — Grâce à la compatibilité au changement de base, et à la compatibilité entre inversibilité de ${}^\mu \widetilde{\text{Ha}}$ et μ -ordinarité vérifiée dans la section 3 (proposition 3.22), on peut en particulier utiliser les résultats de Moonen, [Moo04] et décrire explicitement des \mathcal{O} -modules p -divisibles μ -ordinaires. On va introduire ici quelques notations.

Soit K/\mathbb{Q}_p une extension finie non ramifiée, et $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, π une uniformisante, et κ_K son corps résiduel. Notons $\mathcal{I} = \text{Hom}(\kappa_K, \overline{\mathbb{F}}_p)$.

Définition 8.5. — Soit $\tau \in \mathcal{I}$. Soit R une \mathcal{O} -algèbre p -adiquement complète et séparée. Il existe un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} , noté \mathcal{LT}_τ , de hauteur $[K : \mathbb{Q}_p]$, tel que son module des différentielles $\omega_{\mathcal{LT}_\tau}$ soit de dimension 1, et sur lequel l'action de \mathcal{O} soit donnée par $\rho \circ \tau : \mathcal{O} \longrightarrow R$ où ρ est le morphisme structural de R . On appellera aussi un tel groupe (pour lequel l'action sur l'algèbre de Lie se fait via un seul plongement) un \mathcal{O} -module π -divisible.

Remarque 8.6. — Lorsque R est un \mathcal{O} -module sans torsion (et $\tau : \mathcal{O} \longrightarrow R$ structural, mais on peut en general regarder $\mathcal{O} \otimes_{\tau, \mathcal{O}} R$), c'est le groupe p -divisible associé au display donné par la proposition 29 de [Zin02]. Il dépend a priori du choix d'une uniformisante de K , mais quitte à étendre les scalaires à $\mathcal{O}_{\widehat{K}^{nr}}$, cette ambiguïté disparaît.

Définition 8.7. — On reprend les notations précédentes, supposons que K/\mathbb{Q}_p soit non ramifiée. Soit $A \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble. On note alors,

$$\mathcal{LT}_A,$$

le \mathcal{O} -module p -divisible dont le display est donné par le produit tensoriels des displays des différents $\mathcal{L}\mathcal{T}_\tau$ pour $\tau \in A$, c'est à dire,

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{T}_A) := \bigotimes_{\tau \in A}^{W(R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}} \mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{T}_\tau).$$

On vérifie que cela définit un display sur R , et donc d'après le théorème 9 de [Zin02], $\mathcal{L}\mathcal{T}_A$ existe, c'est un \mathcal{O} -module p -divisible sur R de \mathcal{O} -hauteur 1, de signature $p_\tau = 1$ si et seulement si $\tau \in A$.

Remarque 8.8. — Le produit tensoriel précédent est à prendre au sens du display suivant. La notation est justifiée par le fait que sur un corps p -adique, le module de Tate du groupe p -divisible associé à $\mathcal{L}\mathcal{T}_A$ est un caractère à valeurs dans \mathcal{O}_K , qui est le produit des caractères de Lubin-Tate pour $\tau \in A$.

Dans le cas non ramifié, le display est simplement donné par $\mathcal{P} = \bigoplus_{\tau} W(R)e_\tau$, $\mathcal{Q} = \bigoplus_{\tau \notin A} W(R)e_\tau \oplus \bigoplus_{\tau \in A} I_R e_\tau$, F est donné par

$$F e_\tau = \begin{cases} p e_{\sigma\tau} & \text{si } \tau \notin A \\ e_{\sigma\tau} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application $V^{-1} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ est donnée par $\frac{1}{p}F$, c'est à dire, si $\tau \in A$, $V^{-1}(V x e_\tau) = x e_{\sigma\tau}$, et si $\tau \notin A$, $V^{-1}e_\tau = e_{\sigma\tau}$. On vérifie que cela définit bien un display sur R , muni d'une action de \mathcal{O} , puisque $\mathcal{P} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$.

Exemple 8.9. — Si $A = \emptyset$, alors par convention $\mathcal{L}\mathcal{T}_A = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$. Si $A = \mathcal{I}$, $\mathcal{L}\mathcal{T}_A = \mu_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$.

Remarque 8.10. — Il est probable que l'on n'ait pas besoin de l'hypothèse sur la ramification de K , les groupes de Lubin-Tate existant même dans ce cas, mais leur display n'est défini que si R est sans torsion (cf. [Zin02] Proposition 29). Cela est lié au fait que la signature n'est cependant pas bien défini dans le cas ramifié si $pR = 0$.

Supposons que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ pour F/\mathbb{Q}_p une extension finie non ramifiée. On peut alors réécrire le théorème 1.3.7 de [Moo04].

Théorème 8.11 (Moonen). — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $G/\text{Spec}(k)$ un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} , de \mathcal{O} -hauteur h et de signature $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$. On utilise la notation suivante,

$$\{q_\tau : \tau \in \mathcal{I}\} = \{q^{(1)} < q^{(2)} < \dots < q^{(r)}\}, \quad \text{et} \quad q^{(0)} = 0, q^{(r+1)} = h.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes,

1. G est μ -ordinaire.
2. On a un isomorphisme de \mathcal{O} -groupes p -divisibles,

$$G \simeq X_{(q_\tau)}^{ord} := \prod_{l=1}^{r+1} \mathcal{L}\mathcal{T}_{A_{l-1}}^{q^{(l)} - q^{(l-1)}},$$

où, pour tout l ,

$$A_l = \{\tau \in \mathcal{I} : q_\tau \leq q^{(l)}\} \quad \text{et} \quad A_0 = \emptyset$$

3. On a un isomorphisme de \mathcal{O} -schémas en groupes,

$$G[p] \simeq X_{(q_\tau)}^{ord}[p].$$

On montrera un théorème similaire (au sens où l'on donne une forme explicite aux groupes p -divisibles μ -ordinaires) sur \mathcal{O}_C dans la section II.

Remarque 8.12. — Avec les notations du théorème, on a la suite d'inclusions,

$$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{r+1}.$$

Réciproquement, pour tous sous-ensembles (A_l) de \mathcal{I} totalement ordonnés pour l'inclusion, et des entiers (n_l) , le produit,

$$\prod_{l=1}^{r+1} \mathcal{L}\mathcal{T}_{A_{l-1}}^{n_l},$$

défini un groupe μ -ordinaire pour une certaine donnée μ (que l'on peut expliciter en fonction de la signature du groupe). C'est faux si les (A_i) ne sont pas ordonnés (voir l'exemple de la section 7).

8.3. Exemple de calcul. — Supposons que $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C)$, où $C = \widehat{\mathbb{Q}}_p$.

Soit G/S un groupe p -divisible tronqué d'échelon r , muni d'une action de \mathcal{O} . D'après le début de cette section, on sait associer à G des invariants de Hasse partiels, ainsi qu'un μ -invariant, et ce, même si la base n'est pas lisse. A priori pourtant, la construction (relativement) explicite de la section 4 ne s'applique pas à strictement parler, puisque \mathcal{O}_C/p n'est pas lisse. Notons néanmoins toujours $\Sigma = \text{Spec}(\widehat{W}(\kappa_F))$ et regardons $\mathcal{E} = \mathbb{D}(G)$ le cristal sur $\text{Cris}(S/\Sigma)$ associé par [BBM82] à G . Le site $\text{Cris}(S/\Sigma)$ possède un objet final, l'épaississement à puissances divisées (mais non p -adique) introduit par Fontaine, voir par exemple [Che15],

$$A_{cris} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_C/p.$$

Notons φ le Frobenius de A_{cris} . C'est un relèvement fort du Frobenius de \mathcal{O}_C/p . On peut évaluer le cristal \mathcal{E} sur cet épaississement, et on obtient,

$$H^0(\text{Cris}(S/\Sigma), \mathcal{E}) = \mathcal{E}_{A_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_C/p} =: E,$$

qui est un A_{cris}/p^r module libre de rang $\text{ht}(G)$ muni d'applications V et F , que l'on décompose,

$$E = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} E_\tau.$$

On peut aussi regarder (voir définition 4.2),

$$\text{Fil } E = \text{Ker}(E \rightarrow E \otimes_{\theta} \mathcal{O}_C/p \rightarrow \omega_G^\vee), \quad \text{et} \quad \text{Fil } E_\tau = \text{Fil } E \cap E_\tau.$$

On a alors que

$$V(E_{\tau'}) \subset \text{Fil}(E_{\sigma^{-1}\tau'}^{(\varphi)}) + pE_{\sigma^{-1}\tau'}^{(\varphi)},$$

et si $q_{\tau'} < q_\tau$, alors,

$$\text{Im}\left(\bigotimes_{\tau'}^{q_\tau} \text{Fil}(E_{\tau'}^{(\varphi)})\right) \rightarrow \left(\bigwedge_{\tau'}^{q_\tau} E_{\tau'}^{(\varphi)}\right) \subset \left(\text{Fil}^{q_\tau - q_{\tau'}} A_{cris} \bigwedge_{\tau'}^{q_\tau} E_{\tau'}\right)^{(\varphi)} \subset \bigwedge_{\tau'}^{q_\tau} E_{\tau'} \otimes_{A_{cris}, \varphi} p^{q_\tau - q_{\tau'}} A_{cris}.$$

La dernière inclusion étant due au fait que si M est un A_{cris} -module, si $z \in \text{Fil}^i A_{cris}$, $x \in M$, alors dans $M^{(\varphi)} = M \otimes_{A_{cris}, \varphi} A_{cris}$,

$$(zx) \otimes 1 = x \otimes \varphi(z), \quad \text{et} \quad \varphi(z) \in p^i A_{cris}.$$

On peut donc, pour chaque j tel que $q_{\sigma^j \tau} < q_\tau$ diviser V^j par $p^{q_\tau - q_{\sigma^j \tau}}$ (voir aussi la proposition 4.6), et donc il existe,

$$(2) \quad \zeta_\tau : \bigwedge_{\tau}^q E_\tau \rightarrow \bigwedge_{\tau}^q E_\tau \otimes_{A_{cris}, \varphi^f} A_{cris} \pmod{p^{r-k_\tau} A_{cris}}$$

tel que $p^{k_\tau} \zeta_\tau = V^f$. De plus comme A_{cris} est sans p -torsion, et E étant libre sur A_{cris}/p^r , un tel ζ_τ est unique, or la construction général sur le champ \mathcal{BT}_r du début de cette section nous assure l'existence d'une telle division de V^f , on a donc que $\zeta_\tau \equiv \widetilde{\text{Ha}}_\tau \pmod{p^{r-k_\tau}}$.

On peut restreindre cette application ζ_τ à $\text{Fil } E_\tau$ puis la réduire modulo $\text{Ker } \theta$, et ainsi recalculer effectivement sur le cristal E les invariants de Hasse partiels.

Remarque 8.13. — Dans la proposition 9.13, on donne une autre situation, celle de l'espace des déformations d'un \mathcal{O} -module p -divisible, d'une base non lisse (mais formellement lisse) sur laquelle on peut construire directement les invariants de Hasse Ha_q . Dans ce cas, à l'aide des displays de Zink on a une formule explicite (en termes des coordonnées sur l'espace des déformations) pour ces invariants.

8.4. Diviseurs de Cartier. — D'après l'appendice 9.1, étant donné que le champ \mathcal{BT}_r est lisse, pour montrer que les invariants de Hasse partiels définissent des diviseurs de Cartier, il suffit de montrer que le complémentaire de leur lieu d'annulation est dense (pour la topologie de Zariski). Pour cela, on va simplement utiliser le résultat suivant de [Wed99]. Rappelons simplement nos notations, on fixe $r, h \in \mathbb{N}^*$, et $(p_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$, et on note \mathcal{BT}_r le champ algébrique lisse des groupes p -divisible tronqué d'échelon r , hauteur h , munis d'une action de \mathcal{O} , et de signature $(p_\tau)_\tau$. On note aussi \mathcal{BT}_∞ le champ des groupes p -divisibles de hauteur h , avec une action de \mathcal{O} de signature $(p_\tau)_\tau$. On a un morphisme "points de p^r -torsion",

$$\mathcal{BT}_\infty \xrightarrow{[p^r]} \mathcal{BT}_r.$$

Le résultat suivant est le résultat principal de [Wed99], mais il n'est pas cité comme tel dans [Wed99], on le retranscrit ici sous une forme qui nous arrange (et on donne une esquisse de sa démonstration telle qu'elle est faite dans [Wed99]) :

Théorème 8.14 (Wedhorn). — *Soit F/\mathbb{Q}_p une extension finie non ramifiée, k un corps parfait, et $G/\mathrm{Spec}(k)$ un groupe p -divisible, muni d'une action de \mathcal{O} (de hauteur et signature fixée). Alors il existe une suite $G = G_0, G_1, \dots, G_n$ de groupes p -divisibles sur des corps parfaits k_i , munis d'une action de \mathcal{O} , tels que pour tout i , G soit une spécialisation de G_i , et tel que $G_n/\mathrm{Spec}(k_n)$ soit μ -ordinaire.*

Démonstration. — [Esquisse de la preuve de [Wed99] section 4.2] On peut déformer le display associé à G_i en un display sur $k_i[[T]]$, tel que son changement de base à $k_i((T))^{perf} =: k_{i+1}$ soit associé à un groupe p -divisible avec action de \mathcal{O} vérifiant que son polygone de Newton est strictement plus petit que celui de G_i (si G_i non μ -ordinaire). Donc par récurrence, on trouve un groupe p -divisible sur k_n qui est μ -ordinaire. Pour conclure, si U est un ouvert de $|\mathcal{BT}_r|$ qui contient G_i , et si \widetilde{G}_i est la déformation de G_i sur $k_i[[T]]$ dans \mathcal{BT}_∞ , alors il suffit de voir que $\widetilde{G}_i \in U(k_i[[T]])$, et on aura donc que $G_{i+1} = (\widetilde{G}_i)_\eta \otimes k_{i+1} \in U$. \square

Théorème 8.15. — *Le lieu μ -ordinaire dans $\mathcal{BT}_r^{\mu-ord} \subset \mathcal{BT}_r$ est (topologiquement) dense. En particulier, ${}^\mu \widehat{\mathrm{Ha}}$ et $\widehat{\mathrm{Ha}}_b$, pour tout $b \in \{q_\tau : \tau \in \mathcal{I}\}$, sont des diviseurs de Cartier sur \mathcal{BT}_r .*

Démonstration. — Soit k un corps parfait, $x \in \mathcal{BT}_r(k)$ un \mathcal{O} -module p -divisible tronqué. D'après [Wed01], Proposition 3.2, il existe $\tilde{x} \in \mathcal{BT}_\infty(k)$ au dessus de x (i.e. tel que $\tilde{x}[p^r] = x$). D'après le théorème 8.14 précédent, il existe $\tilde{y} \in \mathcal{BT}_\infty(k)$ une générisation de \tilde{x} qui est μ -ordinaire. Maintenant $y = \tilde{y}[p^r] \in \mathcal{BT}_r$ est une générisation de x , et comme être μ -ordinaire ne dépend que de la p -torsion (8.11), $y \in \mathcal{BT}_r^{\mu-ord}(k)$. Comme le champ \mathcal{BT}_r est algébrique, on en déduit que le lieu μ -ordinaire de $|\mathcal{BT}_r|$ est (topologiquement) dense.

Donc par les résultats de l'appendice B, comme \mathcal{BT}_r est lisse, donc réduit, ${}^\mu \widehat{\mathrm{Ha}}$ est un diviseur de Cartier sur \mathcal{BT}_r . Comme c'est un produit, on en déduit donc le même résultat pour $\widehat{\mathrm{Ha}}_b$. \square

9. Multiplicité du diviseur ${}^\mu \widehat{\mathrm{Ha}}$

Rappelons que l'on est dans la situation de F/\mathbb{Q}_p une extension non ramifiée, et d'un $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ -module p -divisible G (éventuellement tronqué), de signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$, sur une base S (par exemple le champ $\mathcal{BT}_{r, \mathcal{O}, h, (p_\tau)}$ précédemment défini). Afin de démontrer des propriétés sur les invariants de Hasse, notamment qu'ils sont réduits, il serait utile de ramener de tels énoncés à des propriétés géométriques sur certaines variétés de Shimura, dont on connaît bien la géométrie (cf. [VW13] ou [Ham13]).

9.1. Globalisation : Variétés de Shimura. — On va définir une donnée PEL simple (cf. [Kot92]) $\mathcal{D} = (B, \star, U_{\mathbb{Q}}, <, >)$, de telle sorte que le groupe p -divisible associé à la variété abélienne universelle sur $Sh_{\mathcal{D}}$, la variété de Shimura (entière) associée à \mathcal{D} , soit relié à $\mathcal{BT}_{r, \mathcal{O}, h, (p_\tau, q_\tau)}$.

À priori les \mathcal{O} -modules p -divisibles qui nous intéressent ne sont pas polarisés (mais s'ils le sont on pourra leur appliquer nos résultats en "oubliant" la polarisation) et sont donc reliés à des données de Shimura de type unitaire, qui se scindent au dessus du nombre premier considéré (le cas (AL) de [VW13]). Commençons donc par définir un corps de nombre CM. Soit L^+/\mathbb{Q} un corps de nombres totalement réel tel que p soit inerte dans L^+ et tel que $\mathcal{O}_{L^+, p} = \mathcal{O}$. Un tel corps de nombres existe, par [Far04], 10.1.2 par exemple. Soit K/\mathbb{Q} un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé,

et posons $L = L^+K$, c'est un corps CM sur \mathbb{Q} (de corps totalement réel L^+). On peut alors associer à notre donnée locale $(\mathcal{O}, h, (p_\tau, q_\tau))$ une donnée globale entière (cf. [Far04] 10.1.1.3, et proposition 10.1.3),

$$\mathcal{D} = (B, \star, V, <, >, \mathcal{O}_{B,p}, \Lambda, h_0),$$

où B/\mathbb{Q} est un algèbre à division de centre L , \star est une involution de seconde espèce de B qui induit l'automorphisme non trivial de $\text{Gal}(L/L^+)$, $V = B$, $<, >$ donné par $\langle x, y \rangle = \text{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xy^\star)$, $\mathcal{O}_{B,p} = \Lambda$ est un ordre maximal en p de B . On note G/\mathbb{Q} le groupe des similitudes unitaires associé à $(B, \star, V, <, >)$ et $h_0 : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_B(V)$. Ces choix assurent que si G_1 est le groupe unitaire associé à G , alors $G_1(\mathbb{Q}_p) = \text{GL}_h(F)$ et $G_1(\mathbb{R}) = \prod_{\tau:L^+ \rightarrow \mathbb{R}} U(p_\tau, q_\tau)$. On note E' le corps réflexe global associé.

Définition 9.1. — On dira que \mathcal{D} est une donnée de Shimura qui globalise la donnée locale $(\mathcal{O}, h, (p_\tau, q_\tau))$. Cette donnée \mathcal{D} n'est pas unique.

Remarque 9.2. — On a $h^2 = [B : L]$ et un isomorphisme $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p = M_h(\mathcal{O}_L \otimes \mathbb{Z}_p)$.

À cette donnée \mathcal{D} , et un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, Kottwitz associe une tour de Variétés de Shimura $(\mathcal{S}_{K^p})_{K^p}$ sur $\mathcal{O}_{E'_\nu}$ (E'_ν est la complétion de E' via ν) pour des sous-groupes compacts ouverts $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ suffisamment petit. On fixe un tel K^p , et on note $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{K^p}$, puisque le choix d'un niveau hors p n'est pas central dans nos constructions.

\mathcal{S} paramètre des quadruplets (A, λ, i, η^p) où A est un schéma abélien de genre fh^2 (où $f = [\mathcal{O} : \mathbb{Z}_p]$), λ une polarisation,

$$i : \mathcal{O}_B \rightarrow \text{End}(A),$$

compatible à l'involution de Rosati associée à λ et η^p est une structure de niveau hors p .

Considérons $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ le schéma abélien universel, et $\mathcal{A}[p^\infty]$ son groupe p -divisible. On note $L_p = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$. C'est un $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p = M_h(\mathcal{O}_{L_p})$ -module, que l'on peut donc réécrire, grâce à l'équivalence de Morita,

$$\mathcal{A}[p^\infty] = \mathcal{O}_{L_p}^h \otimes H,$$

où H est un \mathcal{O}_{L_p} -module p -divisible de hauteur $2fh$. Or p est décomposé dans L , donc $\mathcal{O}_{L_p} = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ et on peut donc écrire grâce à l'involution de Rosati,

$$H = G \times G^D,$$

où G est un \mathcal{O} -module (non polarisé), de \mathcal{O} -hauteur h et de signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$. La polarisation de H échange G et G^D .

Proposition 9.3. — $\mathcal{A}[p^r]$ est alors associé une flèche,

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{BT}_{r, \mathcal{O}, h, (p_\tau, q_\tau)},$$

et on définit l'invariant de Hasse μ -ordinaire de \mathcal{S} comme ${}^\mu \widetilde{\text{Ha}} := {}^\mu \widetilde{\text{Ha}}(G) = f^*({}^\mu \widetilde{\text{Ha}}(\widetilde{G}^{univ}))$.

Le lieu μ -ordinaire de \mathcal{S} correspond au lieu d'inversibilité de ${}^\mu \text{Ha}$, il est dense ([Wed99]) et il est affine dans la compactification minimale.

Remarque 9.4. — Etant donné une donnée de Shimura PEL non ramifiée, plus générale que la précédente, on pourrait encore découper $\mathcal{A}[p^\infty]$ de manière semblable et associer un (des) invariants de Hasse μ -ordinaires (partiels) à chaque composant.

9.2. Espaces de déformations. — Soit E le corps réflex (local) défini dans la section 8 et κ_E son corps résiduel, de caractéristique p . Soit S un \mathcal{O}_E -schéma. Un groupe p -divisible sur S avec \mathcal{O} -structure est la donnée $\underline{H} = (H, \iota)$ d'un S -groupe p -divisible et d'un morphisme,

$$\iota : \mathcal{O} \rightarrow \text{End}(H).$$

Soit k un corps parfait de caractéristique p . Soit \mathcal{C}_k la catégorie des $\mathcal{W}(k)$ -algèbres artiniennes locales R de corps résiduel k (avec les morphismes évidents).

Théoreme 9.5. — Soit $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \bar{\iota})$ un \mathcal{O} -module p -divisible sur k . Notons

$$\mathrm{Def}_{\mathbb{H}} : \mathcal{C}_k \longrightarrow \mathbf{Ens},$$

le foncteur qui à R associe les classes d'isomorphismes de groupes p -divisibles avec \mathcal{O} -structure (H, ι) sur $\mathrm{Spec}(R)$ munis d'une trivialisaton,

$$\rho_H : H \times \mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H},$$

qui commute avec ι et $\bar{\iota}$. Alors $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}$ est pro-représentable par une $W(k)$ -algèbre noethérienne complète $R_{\mathbb{H}}$ de corps résiduel k . De plus ce foncteur est formellement lisse, donc $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}$ est (pro-)représentable par

$$W(k)[[t_1, \dots, t_r]], \quad \text{où } r = \sum_{\tau \in \mathcal{I}} p_{\tau} q_{\tau}.$$

Démonstration. — On sait déjà par [RZ96], par exemple, qu'en oubliant la \mathcal{O} -structure, $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}$ est représentable. Notons \tilde{H} le groupe p -divisible universel sur $R_{\mathbb{H}}$ qui représente ce dernier foncteur. Maintenant \mathcal{O} agit par isogénies sur \mathbb{H} , et par rigidité des quasi-isogénies, par quasi-isogénies sur \tilde{H} . Le lieu où \mathcal{O} agit par isogénies, et donc $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}$, apparaît comme un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(R_{\mathbb{H}})$ [RZ96] Proposition 2.9. La suite découle de [Wed01], corollaire 2.10. Le calcul de la dimension est donné par la théorie de Grothendieck-Messing : un relèvement à $S_0 \rightarrow S$ du faisceau $\omega_{G_0^p}$ correspond à une déformation qui relève aussi l'action de \mathcal{O} si pour chaque τ , cela induit un relèvement de $\omega_{G_0^p, \tau}$ est dans $\mathbb{D}(G_0)_{\tau, (S_0 \rightarrow S)}$ (puisque Grothendieck-Messing est une équivalence de catégories). \square

Remarque 9.6. — Dans les cas (AU) et (C) de [VW13] on a aussi des espaces de déformations semblables, notés $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}^{AU}$ et $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}^C$. Leurs dimensions respectives sont

$$\frac{1}{2} \sum_{\tau} p_{\tau} q_{\tau} \quad \text{et} \quad f \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} + 1 \right) / 2.$$

Introduisons $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{K^p} / \mathrm{Spec}(O_{E', \nu})$ la variété de Shimura (de niveau hyperspécial en p) associée à la donnée PEL entière \mathcal{D} de type (AL) (cf section 9.1; définition 9.1) qui globalise la donnée $(\mathcal{O}, h, (p_{\tau})_{\tau \in \mathcal{I}})$ au sens de la définition 9.1.

Proposition 9.7. — Soit $\bar{\mathcal{S}}$ est la réduction modulo p de la variété de Shimura \mathcal{S} et $x \in \bar{\mathcal{S}}(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p , et \underline{G}_x le \mathcal{O} -module p -divisible associé à x par la recette de la sous-section 9.1; alors,

$$\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{S}, x}) \simeq \mathrm{Def}_{\underline{G}_x}.$$

Démonstration. — L'assertion découle de la théorie de Serre-Tate, cf. [Kat81], Theorem 1.2.1. \square

Remarque 9.8. — On peut bien sur écrire de telles identifications des anneaux locaux des variétés de Shimura générales en termes de produits des espaces du type $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}$ et $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}^{AU}$ dans le cas (A) et $\mathrm{Def}_{\mathbb{H}}^C$ dans le cas (C). Comme on a supposé qu'il n'y a qu'un idéal au dessus de p dans la définition 9.1, on est ici dans un cas particulier où il n'y a qu'un espace de déformations.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \bar{\iota})$ un groupe p -divisible sur k avec \mathcal{O} -structure, et soit,

$$\mathrm{Def}_{\mathbb{H}} = \mathrm{Spf}(W(k)[[t_1, \dots, t_r]]),$$

l'espace des déformations (par isomorphisme) de $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \bar{\iota})$. Soit $H^{univ} \rightarrow \mathrm{Spf}(W(k)[[t_1, \dots, t_r]])$, la déformation universelle.

À $H^{univ} \rightarrow \mathrm{Spf}(k[[t_1, \dots, t_r]])$, sa réduction modulo p , est associé un display $\mathcal{P} = (P, Q, F, V^{-1})$, (cf. [Zin01], et [Zin02] si \mathbb{H} est formel), où P est un module libre sur $\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]])$ (même sur $W(k[[t_1, \dots, t_r]])$ si \mathbb{H} est formel), $Q \subset P$ est un sous-module, $F : P \rightarrow P$, et $V^{-1} : Q \rightarrow P$ sont F -linéaires où F est le Frobenius de $\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]])$, vérifiant certaines conditions.

Or à H^{univ} est aussi associé un cristal par Berthelot-Breen-Messing [BBM82], $\mathbb{D}(H^{univ})$, que l'on peut voir, quitte à l'évaluer sur l'épaississement à puissances divisées (cf. [Zin02] section 2, [GdMDdm74] Chapitre IV 3.1, [Lau14] Lemma 1.16), $\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]]) \rightarrow k[[t_1, \dots, t_r]]$, où l'anneau $\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]])$ est un sous anneau de $W(k[[t_1, \dots, t_r]])$, définit dans [Zin02], section 2 et [Lau14] section 1.2 sous la

notation \mathbb{W} , comme un module localement libre sur $\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]])$, et on a la relation suivante, [Zin02], Theorem 6, [Lau14] Theorem B,

$$\mathbb{D}(H^{univ})_{\hat{W}(k[[t_i]]) \rightarrow k[[t_i]]} = P.$$

Dans [Zin02] formule (87), Zink calcule explicitement le display de la déformation universelle d'un groupe p -divisible, et on aimerait utiliser celui-ci pour calculer explicitement les invariants de Hasse partiels.

Tout d'abord introduisons (rapidement) les displays munis d'une \mathcal{O} -action. On suppose que tous les schémas sont au-dessus de \mathcal{O} dans la suite.

Comme H^{univ} est muni d'une \mathcal{O} -action, on peut décomposer,

$$P = \bigoplus_{\tau} P_{\tau},$$

idem pour Q , et les morphismes F et V^{-1} sont σ -gradués pour cette décomposition. Le calcul du display de la déformation universelle d'un groupe p -divisible formel (cf [Zin02] formule 87) s'adapte ici à la fois aux groupes p -divisibles non nécessairement formels (voir aussi [Lau14] section 3.2) et à l'action de \mathcal{O} , en ne considérant que des objets compatibles à la décomposition précédente de \mathcal{P} , l'outil principal étant la théorie des déformations de Grothendieck-Messing. Ceci s'adapte dans le cas d'une \mathcal{O} -action, à condition que la déformation de l'algèbre de Lie soit \mathcal{O} -graduée. On en déduit alors la proposition suivante.

Proposition 9.9. — *Soit k algébriquement clos de caractéristique p . Soit $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \bar{\iota})$ un groupe p -divisible sur k avec \mathcal{O} -action et notons $\mathcal{P}_0 = (P_0, Q_0, F_0, V_0^{-1}) = (\mathbb{D}(\mathbb{H}), V(\mathbb{D}(\mathbb{H})), F, \frac{1}{p}F)$ son display (de Dieudonné) sur k , où $(\mathbb{D}(\mathbb{H}), F, V)$ est le module de Dieudonné de \mathbb{H} . Choisissons une base de P_0 , $(e_i^{\tau})_{\tau \in \mathcal{I}, i \in \{1, \dots, h\}}$, adaptée à la décomposition,*

$$P_0 = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}} P_0^{\tau},$$

de telle manière qu'après réduction modulo p , pour tout τ , $(e_1^{\tau}, \dots, e_{p_{\tau}}^{\tau})$ induise une base de $P_0^{\tau}/VP_0^{\sigma\tau} = \omega_{\mathbb{H}, \tau}^{\vee}$. Notons B la matrice (à coefficient dans $W(k)$) dans cette base de

$$F \oplus V^{-1} : P_0 = T \oplus L \longrightarrow P_0,$$

où

$$L = \bigoplus L_{\tau} \quad \text{et} \quad T = \bigoplus T_{\tau},$$

et $T_{\tau} = W(k) \langle e_1^{\tau}, \dots, e_{p_{\tau}}^{\tau} \rangle$, $L_{\tau} = W(k) \langle e_{p_{\tau}+1}^{\tau}, \dots, e_h^{\tau} \rangle$. Le display de la déformation universelle $H^{univ} \longrightarrow \mathrm{Spf}(k[[t_1, \dots, t_r]])$, est alors libre et donné par la matrice de Hasse-Witt (i.e. de $F \oplus V^{-1}$) suivante,

$$\mathrm{Diag} \left(\left(\begin{array}{c} \mathrm{Id}_{p_{\tau}} & ([t_{k,l}^{\tau}])_{(k,l) \in \{1, \dots, p_{\tau}\} \times \{1, \dots, q_{\tau}\}} \\ 0 & \mathrm{Id}_{q_{\tau}} \end{array} \right), \tau \in \mathcal{I} \right) B,$$

où $[\cdot] : k[[t_i, i]] \longrightarrow \hat{W}(k[[t_i, i]])$ est l'application de Teichmüller.

Remarque 9.10. — On note pour un ensemble fini $\{1, \dots, n\}$, et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une collection de matrices, la matrice diagonale par blocs,

$$\mathrm{Diag}(A_i : i \in \{1, \dots, n\}) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$

À priori l'ensemble \mathcal{I} des plongements n'est pas ordonné, mais quitte à choisir un plongement $\tau_0 \in \mathcal{I}$, on a une bijection,

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, f\} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ i & \longmapsto & \sigma^i \tau_0 \end{array},$$

où σ est le Frobenius de \mathcal{O} . Néanmoins on n'insiste pas sur cette remarque, et on espère que la notation est suffisamment claire pour ne pas induire le lecteur en erreur.

Exemple 9.11. — Soit le groupe p -divisible de hauteur 4 sur k avec \mathbb{Z}_{p^2} -action et signature $((1, 1), (0, 2))$ donné par la matrice de Verschiebung,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'est pas μ -ordinaire. Sa matrice de Hasse Witt $(F \oplus \frac{1}{p}F)$ est donnée dans la même base par,

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le display de la déformation universelle de G à coefficients dans $W(k[[X]])$ est donc donné "dans la même base" par la matrice de Hasse-Witt,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ X & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & X \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 9.12. — Soit R un anneau de caractéristique p . Le Frobenius F de $W(R)$ relève le Frobenius de R mais aussi celui de $W(R)/pW(R)$. Autrement dit, c'est un relèvement fort de Frobenius. C'est encore vrai pour $\hat{W}(R) \subset W(R)$.

Démonstration. — Soit $x = (x_0, x_1, \dots) \in W(R)$, alors écrivons que $x = (x_0, 0, \dots) +^V y$. On a donc que $^F x \in ^F(x_0, \dots) + pW(R)$ puisque $^F V = p$. Mais on a aussi que $^V W(R) = I_R$ et

$$I_R^p \subset pI_R,$$

puisque I_R est muni de puissances divisées ([GdMDm74] Chap IV, 3.1), donc $x^p \in (x_0, \dots)^p + pW(R)$ et comme $(x_0, 0, \dots)^p = ^F(x_0, 0, \dots)$, cela conclut pour $W(R)$. Pour $\hat{W}(R)$, on utilise que $pW(R) \cap \hat{W}(R) = p\hat{W}(R)$ ([Lau14] Lemma 1.15 si $p \geq 3$ ou si $p = 2$ et $2R = 0$, la preuve fonctionne encore : si $y = (y_0, y_1, \dots) \in W(\mathfrak{m}_R)$ tel que $2y \in \hat{W}(R)$, alors $2y = (0, y_0^2, y_1^2, \dots)$ or si $y_i \in \mathfrak{m}_R$ tel que $y_i^2 \in \mathfrak{m}_R^{2n}$, alors $y_i \in \mathfrak{m}_R^n$. \square

Proposition 9.13. — Gardons les notations de la proposition précédente, et notons $\mathbb{E} = \mathbb{D}(H^{univ})^{\hat{W}(k[[t_1, \dots, t_r]]) \rightarrow k[[t_1, \dots, t_r]]}$. Notons $\varphi = ^F$ le morphisme de Frobenius de $\hat{W}(k[[t_i; i \in \{1, \dots, r\}]])$ ([Zin02] lemma 2). Alors il existe pour tout τ un unique morphisme,

$$\widetilde{\text{Ha}}_\tau : \bigwedge^{q_\tau} \mathbb{E}_\tau \longrightarrow \text{Fil}(\bigwedge^{q_\tau} \mathbb{E}_\tau^{(\varphi)}),$$

tel que $p^{k_\tau} \widetilde{\text{Ha}}_\tau = V^f$. Ce morphisme correspond à l'invariant de Hasse partiel construit comme dans la section 8. De plus, d'après la proposition précédente et [Zin02] Theorem 6, on peut calculer explicitement la matrice de

$$V : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{(\varphi)},$$

sur \mathbb{E} , elle est donnée par :

$$A \text{Diag} \left(\begin{pmatrix} \text{Id}_{p_\tau} & -([t_{k,l}^i])_{(k,l) \in \{1, \dots, p_\tau\} \times \{1, \dots, q_\tau\}} \\ 0 & \text{Id}_{q_\tau} \end{pmatrix}; \tau \in \mathcal{I} \right),$$

où $A \in M_{fh}(W(k))$ est un relèvement de la matrice de V de \mathbb{H} , dans une base adaptée à l'action de \mathcal{O} et à la filtration de Hodge (comme dans la proposition précédente).

Démonstration. — φ est un relèvement fort de Frobenius sur $\hat{W}(k)[[t_i; i]]$, donc par le corollaire 4.7, V^f est bien divisible par p^{k_τ} , et comme $\hat{W}(k[[t_i; i]])$ est sans p -torsion (on plonge $k[[t]]$ dans son perfectisé, qui induit une injection $W(k[[t]]) \subset W(k[[t]]^{perf})$ qui est sans torsion, et $\hat{W}(R) \subset W(R)$), une telle division est unique, et donc correspond à l'invariant de Hasse construit dans la section 8. φ n'est pas inversible sur $\hat{W}(k[[t_i; i]])$, mais on peut tout de même construire une application V :

$\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^{(\varphi)}$ (notée $V^\#$ dans [Zin02]), alors la proposition précédente et le théorème B de [Lau14] (ou le théorème 6 de [Zin02]) nous assure la forme voulue pour la matrice de V . \square

Remarque 9.14. — À l'aide de la proposition précédente, on va pouvoir explicitement calculer $\widetilde{\text{Ha}}_\tau$ sur les espaces de déformations, et donc localement sur les variétés de Shimura.

Dans certains calculs (notamment pour la section sur la dualité, mais pas pour tous les calculs de multiplicités), on aurait pu se passer de la théorie de [Zin01],[Lau14] et utiliser seulement les displays des groupes formels en découpant le groupe p -divisible \mathbb{H} en parties multiplicative, biconnexe, étale : $\mathbb{H} = \mathbb{H}^m \oplus \mathbb{H}^{00} \oplus \mathbb{H}^{et}$ et en utilisant la proposition 7.3 et la remarque 7.2.

Ce découpage fonctionne sur les anneaux de déformation lorsque \mathbb{H} est μ -ordinaire (ou qu'il a déjà une partie étale et multiplicative de taille maximale par rapport à sa signature) puisque le polygone de Newton diminue par déformation. Malheureusement pour les calculs de multiplicités, si la signature permet une partie étale (i.e. $\min_\tau q_\tau \neq 0$), sur la strate de Newton associée au plus petit des q_τ , le groupe \mathbb{H} que l'on considère est presque formel (sa partie étale n'est pas de taille maximale) mais le groupe en fibre générique sur l'espace de déformation a une partie étale maximale (il est μ -ordinaire), autrement dit, même en découpant la partie étale de \mathbb{H} , H^{univ} n'est pas formel. Ceci dit, une fois la dualité connue, on aurait tout de même pu s'en sortir quitte à passer au dual de H^{univ} (sauf lorsqu'il y a un lieu ordinaire, i.e. $p_\tau = p_{\tau'}(\notin \{0, h\})$ pour tout τ, τ').

9.3. Strates de Newton et multiplicité des invariants. —

Hypothèse 9.15. — Supposons maintenant que tous les $q_\tau, \tau \in \mathcal{I}$, tels que $q_\tau \notin \{0, h\}$, sont distincts, i.e.

$$q_\tau \notin \{0, h\} \text{ et } \tau' \neq \tau \Rightarrow q_\tau \neq q_{\tau'}.$$

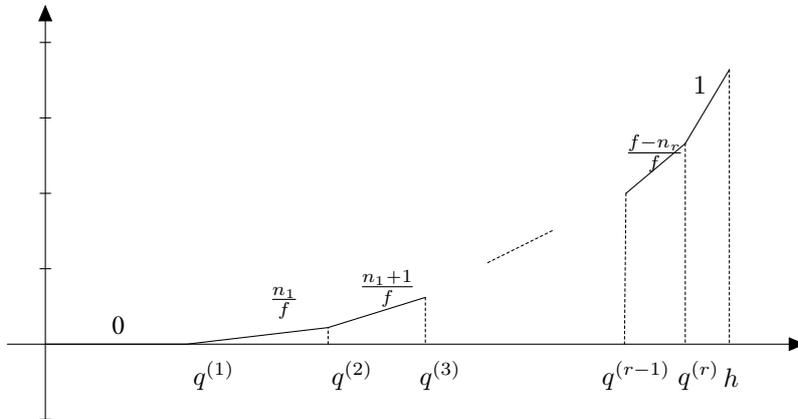
Alors on a le théorème suivant :

Théorème 9.16. — *Sous l'hypothèse 9.15, le diviseur de Cartier $V(\mu\text{Ha}) \subset \mathcal{BT}_{r,h,(p_\tau)}$, associé à l'invariant de Hasse μ -ordinaire, est réduit.*

Proposition 9.17. — *Soit $S/\text{Spec}(\mathcal{O}_E)$ la donnée de Shimura PEL associée au problème précédent (cf. 9.1), \overline{S} sa réduction modulo p . Alors le lieu μ -ordinaire est dense, et sur un ouvert dense du complémentaire, l'invariant de Hasse ${}^\mu\text{Ha}$ définit une forme linéaire non nulle dans l'espace tangent de \overline{S} . En particulier $V({}^\mu\text{Ha}) \subset \overline{S}$ est réduit.*

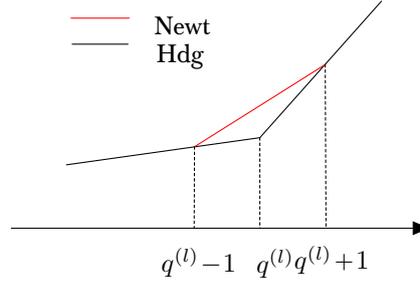
Démonstration. — Le fait que le lieu μ -ordinaire soit dense est déjà connu, cf [Wed99]. On va montrer que sur les strates de $V({}^\mu\text{Ha})$ minimales (au sens du polygone de Newton) ${}^\mu\text{Ha}$ définit une forme linéaire non nulle dans l'espace tangent. Soit $x \in \overline{S}$. Son \mathcal{O} -polygone de Hodge est celui de la figure 6. Les $q^{(i)}, i \in \{1, \dots, f\}$ tels que $q^{(i)} \notin \{0, h\}$ sont tous distincts par hypothèse. De plus le \mathcal{O} -polygone de

Figure 6. \mathcal{O} -polygone de Hodge associée à la signature $(q_\tau)_{\tau \in \mathcal{I}}$.



Newton de x est au-dessus de son polygone de Hodge, et a même point terminal. Regardons les points géométriques x_l , $l \in \{1, \dots, f\}$ tels que $q^{(l)} \notin \{0, h\}$, de \overline{S} , associé aux groupes p -divisible $G/\text{Spec}(k)$, où k algébriquement clos, tels que le polygone de Newton soit égal au polygone de Hodge, sauf autour de $q^{(l)}$ où il est donné par la figure 7. C'est à dire que l'on s'intéresse aux points x_l dans la strate de

Figure 7. Le polygone de Newton b^l .

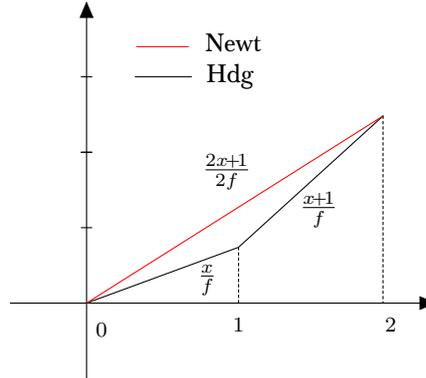


Newton de S associée au polygone ci-dessus. On note \mathcal{N}_{b^l} cette strate. Dans ce cas, par le théorème 3.14, on a l'existence de sous groupes $H_1 \subset H_2$ de G tels que l'extension,

$$0 \subset H_1 \subset H_2 \subset G,$$

soit scindée, que les polygones de Newton et de Hodge de H_1 (respectivement G/H_2 , respectivement H_2/H_1) coïncident avec la partie des polygones de Newton et de Hodge de G définis jusqu'à l'abscisse $q^{(l)} - 1$ (respectivement, à partir de l'abscisse $q^{(l)} + 1$, respectivement, entre les abscisses $q^{(l)} - 1$ et $q^{(l)} + 1$). Dans ce cas H_1 et G/H_2 sont μ -ordinaires (pour des signatures (q_τ) différentes de celles d'origine, donnés par la remarque 3.16). Donc par la remarque 7.2 et la proposition 7.3, il suffit de regarder $H := H_2/H_1$.

Figure 8. \mathcal{O} -polygones de Hodge et Newton de H .



Notons alors,

$$x := |\{\tau \in \mathcal{I} | q_\tau < q^{(l)}\}|, \quad z := |\{\tau \in \mathcal{I} | q_\tau > q^{(l)}\}|.$$

On a par l'hypothèse 9.15 alors $x + 1 + z = f = [F : \mathbb{Q}_p]$. Alors H est un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} , de \mathcal{O} -hauteur 2 et de signature,

$$q_\tau(H) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_\tau(G) < q^{(l)} \\ 1 & \text{si } q_\tau(G) = q^{(l)} \\ 2 & \text{si } q_\tau(G) > q^{(l)} \end{cases}$$

On a donc pour τ tel que $q_\tau(G) < q^{(l)}$, i.e. $q_\tau(H) = 0$, $V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} = p\mathbb{D}(H)_\tau$, et pour τ tel que $q_\tau(G) > q^{(l)}$, i.e. $q_\tau(H) = 2$, $V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} = \mathbb{D}(H)_\tau$. On peut alors fixer une base de $\mathbb{D}(H)$, i.e. un isomorphisme $\mathbb{D}(H) = (W(k)^2)^f$, et un isomorphisme qui conserve l'ordre (normal habituel sur $\{1, \dots, f\}$), donné par le Frobenius sur \mathcal{I} , $\{1, \dots, f\} \simeq \mathcal{I}$ tel que $\mathbb{D}(H)_i$ est placé en i -position. Avec cet isomorphisme, les matrices de F et V sont données par,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & & & p^{n_f} I_2 \\ p^{n_1} I_2 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ & & A & \ddots & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & & p^{n_{f-1}} I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et,}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & p^{1-n_1} I_2 & & & & \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & B & & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & p^{1-n_{f-1}} I_2 \\ p^{1-n_f} I_2 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $n_i \in \{0, 1\}$ et $A, B \in M_2(W(k))$ sont en position $(k, k+1)$ et $(k+1, k)$ et vérifient $A^\sigma B = B^\sigma A = pI_2$. Comme $q_k = 1$, quitte à changer de base, on a deux choix possibles (d'après la classification des cristaux de hauteur 2 et dimension 1, appliquée au F^f -cristal $(W(k)^2, V^f)$, où V^f est donné par A) pour A (qui déterminent chacun un unique choix de B),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le premier cas est le cas où H est μ -ordinaire, ce qui est exclu, on est donc dans le second cas. En particulier, cette strate de Newton est une strate d'Ekedahl-Oort minimale, comme on le verra dans la proposition 9.18. On voit déjà que tout élément de \mathcal{N}_{b^l} détermine uniquement, grâce à la matrice précédente, sa p -torsion.

Retournons alors au calcul de l'invariant de Hasse partiel associé à un point de la strate de Newton-Ekedahl-Oort \mathcal{N}_{b^l} . D'après la proposition 9.13, on peut écrire la matrice de V du cristal \mathcal{P} de la \mathcal{O} -déformation universelle de H , dans une base $(\mathcal{P} \simeq ((\hat{W}(k[[X]]))^2)^f)$ adaptée aux matrices de V et F précédemment écrites,

$$V^{univ} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & p^{n_f} I_2 \\ p^{n_1} I_2 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & -X \end{pmatrix} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & p^{n_{f-1}} I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que,

$$(V^{univ})^f = p^{(\sum_{j \neq k} n_j)} \text{Diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & -X \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & -X \end{pmatrix} \right).$$

Et donc que $\text{Ha}_k(V^{univ}) = -X$, et donc ${}^\mu \text{Ha}(G) = -X$ (à un inversible près). On en déduit donc que l'invariant de Hasse est de multiplicité 1 (i.e. définit une forme linéaire non nulle sur l'espace tangent)

sur la réunion,

$$\bigcup_{l=1}^r \mathcal{N}_{b^l} \subset V_S({}^\mu \text{Ha}).$$

Or d'après [Ham13], Theorem 1.1, (b), cette union est dense dans le complémentaire du lieu ordinaire, donc ${}^\mu \text{Ha}$ est réduit (et c'est aussi le cas de tous les Ha_τ). \square

En fait, on peut dire un petit peu plus sur la géométrie des strates de Newton précédemment considérées :

Proposition 9.18. — *Dans la variété de Shimura simple S précédente, la strate de Newton \mathcal{N}_{b^l} est une strate d'Ekedahl-Oort minimale.*

Démonstration. — On a déjà vu au cours de la démonstration précédente (à l'aide de la filtration Hodge-Newton et du calcul de la signature des gradués) qu'un groupe p -divisible dans \mathcal{N}_{b^l} détermine entièrement (et uniquement) sa p -torsion. Pour la réciproque, c'est le lemme suivant.

Lemme 9.19. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit N_1, N_2 deux groupes p -divisibles sur k , avec action de \mathcal{O} , μ -ordinaires, et H un \mathcal{O} -groupe p -divisible sur k , de \mathcal{O} -hauteur 2. Supposons que toutes les pentes de Newtons vérifient l'inégalité,*

$$\text{pentes de } \text{Newt}_{\mathcal{O}}(N_1) \leq \text{pentes de } \text{Newt}_{\mathcal{O}}(H) \leq \text{pentes de } \text{Newt}_{\mathcal{O}}(N_2).$$

Soit \underline{X} un \mathcal{O} -groupe p -divisible (sur k), dont la p -torsion (munie de sa \mathcal{O} -structure) vérifie,

$$\underline{X}[p] \simeq (N_1 \times H \times N_2)[p].$$

Alors

$$\underline{X} \simeq N_1 \times H \times N_2.$$

Démonstration. — Par ce qui précède le lemme, il suffit de montrer que \underline{X} est isogène à $N_1 \times H \times N_2$, en utilisant que si on a une suite exacte,

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de groupes p -divisibles sur k avec \mathcal{O} -action, alors B est isogène à $A \times C$. En raisonnant exactement comme dans la démonstration du théorème 1.3.7. de [Moo04] (qui découpe petit à petit des parties de \underline{X} en suivant les pentes de $\text{Hdg}_{\mathcal{O}}(\underline{X})$) et en faisant la même chose sur \underline{X}^D , on peut se ramener au cas où H n'est pas μ -ordinaire (sinon c'est le théorème de Moonen) et le polygone de Newton de $N_1 \times H \times N_2$ possède seulement 2 pentes, voir figure 9. Notons que les polygones de Newton de N_1 ou de N_2 sont égaux à leurs polygones de Hodge (puisque'ils sont μ -ordinaire) et sont donc isoclins.

Soit $\tau \in \mathcal{I}$, $M = \mathbb{D}(\underline{X})$ le module de Dieudonné de \underline{X} et $V^f : M_\tau \longrightarrow M_\tau$. V^f est divisible par p^x , où $x = |\{\tau : q_\tau = 0\}|$ et considérons,

$$\varphi_\tau = \frac{1}{p^x} V^f = M_\tau \longrightarrow M_\tau.$$

Notons $W = W(k)$ et $X_0 = N_1 \times H \times N_2$, et $M_0 = M_1 \oplus M_H \oplus M_2$ son module de Dieudonné, alors la matrice de $\varphi_{\tau,0}$ (V^f est là aussi divisible par p^x , puisque $\underline{X}_0[p] = \underline{X}[p]$) est,

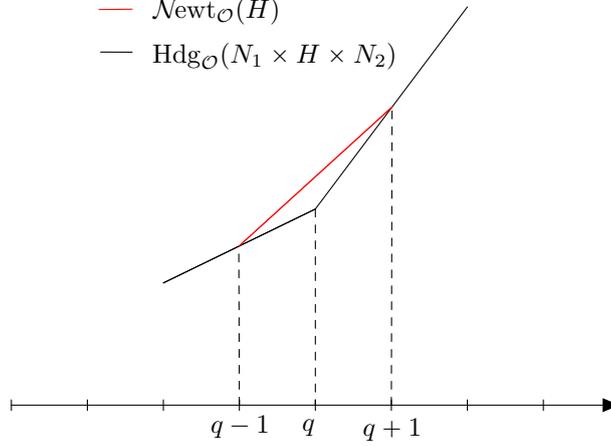
$$\left(\begin{array}{c} I_{q-1} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & p \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ pI_r \end{array} \right), \quad \text{où } r = n - q - 1.$$

Comme $\underline{X}[p] \simeq X_0[p]$, on en déduit que la matrice de φ_τ est congrue à celle de $\varphi_{\tau,0}$ modulo p . Notons,

$$N = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 0 & p \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ pI_r \end{array} \right).$$

La matrice de φ_τ est alors de la forme,

$$\left(\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{array} \right), \quad \text{où } B_2 \equiv 0, B_3 \equiv 0, B_4 \equiv N \pmod{p}, \text{ et } B_1 \text{ est inversible.}$$

Figure 9. \mathcal{O} -polygones de Hodge de $N_1 \times H \times N_2$ et de Newton de H


Soit $\{f_1, \dots, f_{q-1}\}$ un relèvement d'une base de $N_{1,\tau} = M_{1,\tau}/pM_{1,\tau}$ dans M_τ , et $\{f_q, \dots, f_n\}$ un relèvement dans M_τ d'une base de $(M_H \oplus M_2)_\tau \otimes_W k$ (compatibles avec les formes précédentes des matrices). On a une bijection,

$$M_{n-q-1 \times q-1}(W) \xrightarrow{\simeq} \left\{ \begin{array}{l} W - \text{sous-modules } U \subset M_\tau \text{ de rang } q-1, \\ \text{avec } U/(pM_\tau \cap U) \simeq N_{1,\tau}. \end{array} \right\}$$

qui envoie une matrice $A = (a_{i,j})$ sur l'espace U_A engendré par,

$$f_1 + p \cdot \sum_{i=q}^n a_{1,i} f_i, \dots, f_{q-1} + p \cdot \sum_{i=q}^n a_{q-1,i} f_i.$$

On peut vérifier par calcul que $\varphi_\tau(U_A) = U_{A'}$ où

$$A' = \left(\frac{1}{p} B_3 + B_4 \cdot A^{\sigma^f} \right) (B_1 + p B_2 \cdot A^{\sigma^f})^{-1}.$$

Donc U_A est stable par φ_τ si et seulement si,

$$A(B_1 + p B_2 \cdot A^{\sigma^f}) = \left(\frac{1}{p} B_3 + B_4 \cdot A^{\sigma^f} \right).$$

On utilise alors la version suivante (légèrement modifiée) du lemme 1.3.6 de Moonen,

Lemme 9.20. — Soit R un anneau local complet de caractéristique résiduelle p (sans p -torsion) et ρ un automorphisme de R . Soit C_1, C_2, C_3, C_4 des matrices de R de taille $r \times s, s \times s, s \times r, r \times r$ respectivement (où $s = q - 1, r = n - q + 1$), telles que C_2 est inversible. Alors l'équation matricielle,

$$(3) \quad C_1 + X C_2 + (N + p C_3) X^\rho + p X C_4 X^\rho = 0,$$

a une solution $X \in M_{r \times s}(R)$.

Démonstration. — Regardons l'équation modulo p ,

$$C_1 + X C_2 + N X^\rho \equiv 0 \pmod{p}.$$

En regardant terme à terme, on a pour tout $(i, j), i \neq 1$,

$$c_{i,j}^1 + \sum_k x_{i,k} c_{k,l}^2 = 0$$

et pour $i = 1$,

$$c_{1,j}^1 + x_{2,j}^\rho + \sum_k x_{1,k} c_{k,j}^2 = 0.$$

On peut donc prendre comme solution, $x_{i,j} = (-C_1 C_2^{-1})_{i,j}$ pour $i \neq 1$ (comme si $C_3 \equiv 0 \pmod{p}$) et $x_{1,j} = (-\widetilde{C}_1 C_2^{-1})_{1,j}$ où,

$$\widetilde{C}_1 = (\widetilde{c}_{i,j}), \quad \text{où } \widetilde{c}_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{si } i \neq 1 \\ c_{1,j} + x_{2,j}^\rho & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

Notons Γ cette solution (ou plutôt un relèvement de la solution modulo p). Si on pose $X = \Gamma + pX'$, on a que X est solution de (3) si et seulement si X' est solution de

$$(4) \quad C'_1 + X' C'_2 + (N + pC'_3)X^\rho + pX' C'_4 X'^\rho = 0,$$

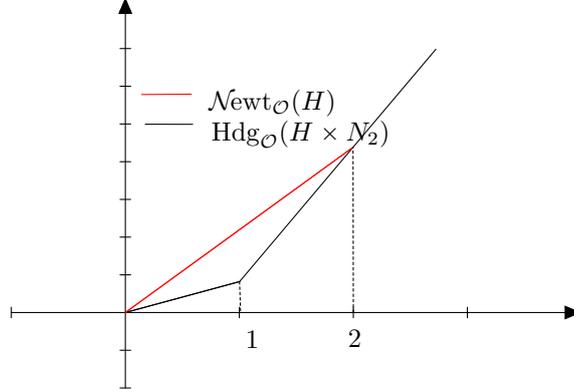
où $C'_1 = C_3 \Gamma^\rho + \Gamma C_4 \Gamma^\rho$, $C'_2 = C_2 + pC_4 \Gamma^\rho$, $C'_3 = C_3 + \Gamma C_4$, et $C'_4 = pC_4$. Donc par approximations successives, comme R est complet, on en déduit une solution à (3). \square

On en déduit donc un sous- W -module stable par φ_τ M'_τ de M_τ et on peut construire comme dans Moonen [Moo04] juste avant (1.3.7.4), un sous- V -module M' de M , avec action de \mathcal{O} , tel que $M' \equiv M_1 \pmod{p}$. On en déduit au niveau des groupes p -divisibles une suite exacte,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Et comme $M' \simeq M_1 \pmod{p}$, on a que M' est $[p]$ -ordinaire, et donc par le théorème 1.3.7 de [Moo04], il est μ -ordinaire, donc $M' \simeq M_1$. On refait le même raisonnement sur Q en inversant V et F (on pourrait aussi passer à Q^\vee , ce qui revient essentiellement au même), qui modulo p est isomorphe à $\mathbb{D}(H \times N_2)$, voir figure 10, et on en déduit une suite exacte,

Figure 10. Polygones de Hodge et Newton de $H \times N_2$.



$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow Q \longrightarrow Q' \longrightarrow 0.$$

où $M'' \simeq M_2$, et Q' est de \mathcal{O} -hauteur 2, donc isomorphe à $\mathbb{D}(H)$. On en déduit donc que \underline{X} est isogène à $N_1 \times H \times N_2$. \square

\square

Remarque 9.21. — On aurait aussi pu se passer des résultats de [Ham13], et utiliser soit [VW13] Théorème 2 (3), ou [VW13] Théorème 2(2), pour montrer que ${}^\mu \text{Ha}$ est réduit en codimension 1, à l'aide de la proposition précédente, puisque nos strates de Newton $\mathcal{N}_{b'}$ sont en fait des strates d'Ekedahl-Oort.

Démonstration. — [Théorème 9.16] Soit \overline{S} une variété de Shimura associée à la donnée $(\mathcal{O}, h, (p_\tau))$ introduite dans la section 9.1. En considérant la p^r -torsion du groupe p -divisible "universel" $G[p^r]$ sur \overline{S} , on a une flèche, cf proposition 9.3,

$$f : \overline{S} \longrightarrow BT_r.$$

Considérons

$$\tilde{S} = \text{Isom}_S(\mathcal{O}_{G[p^r]}, \mathcal{O}_S^{p^{rh}})$$

qui est un recouvrement étale de S , et X la présentation lisse de \mathcal{BT}_r donnée dans la section 8. Alors la trivialisation universelle au-dessus de \tilde{S} de $G[p^r]$ induit une flèche,

$$\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow X.$$

Lemme 9.22. — *Le morphisme \tilde{f} est lisse et surjectif.*

Démonstration. — En effet, pour la formelle lissité, il suffit de voir que pour tout relèvement infinitésimal d'algèbres locales $R' \longrightarrow R$ à corps résiduels parfaits, et tout diagramme,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(R) & \xrightarrow{a_0} & \tilde{S} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \text{Spec}(R') & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

On peut trouver un morphisme,

$$a : \text{Spec}(R') \longrightarrow \tilde{S}$$

qui relève a_0 et tel que le diagramme commute,

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(R') & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & \text{Spec}(R) & \xrightarrow{a_0} & \tilde{S} \\ & & \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ & & \text{Spec}(R') & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a more complex diagram with multiple arrows from Spec(R') to Spec(R) and Spec(S), and a curved arrow from Spec(R') to S. The key elements are the maps a, a0, x, and f-tilde.)

Mais $\tilde{S} = S \times_{\mathcal{BT}_r} X$. Considérons \mathcal{BT}_∞ le champ des groupes p -divisibles avec actions de \mathcal{O}_F et signature fixée. La flèche,

$$\mathcal{BT}_\infty \xrightarrow{[p^r]} \mathcal{BT}_r,$$

est formellement lisse d'après [Wed01] 2.8. On en déduit donc un morphisme,

$$\bar{x}^\infty : \text{Spec}(R') \longrightarrow \mathcal{BT}_\infty.$$

Mais d'après la théorie des déformations de Serre-Tate, la flèche,

$$S \longrightarrow \mathcal{BT}_\infty$$

est formellement lisse, on en déduit donc un morphisme,

$$\bar{a} : \text{Spec}(R') \longrightarrow S.$$

On en déduit donc par propriété universelle du produit fibré, la flèche cherchée,

$$a : \text{Spec}(R') \longrightarrow \tilde{S}.$$

La lissité découle ensuite du fait que \tilde{S} et X sont tous les deux de présentation finie. Enfin, pour la surjectivité, c'est le théorème 6 de [VW13]. \square

De plus, en considérant les sous-schémas fermés $V_X({}^\mu\text{Ha})$ et $V_{\tilde{S}}({}^\mu\text{Ha})$ on a (par définition),

$$V_{\tilde{S}}({}^\mu\text{Ha}) = \tilde{f}^* V_X({}^\mu\text{Ha}).$$

Or on a vu d'après la proposition précédente que $V_{\tilde{S}}({}^\mu\text{Ha})$ était un sous-schéma réduit, c'est donc aussi le cas, par lissité et surjectivité de \tilde{f} , de $V_X({}^\mu\text{Ha})$. Par l'appendice B, le diviseur de Cartier ${}^\mu\text{Ha}$ sur \mathcal{BT}_r est donc réduit. \square

Remarque 9.23. — Si l'hypothèse 9.15 n'est pas vérifiée, alors il existe $\tau \neq \tau'$ tels que $q_\tau = q_{\tau'}$, notons $\tau' = \sigma^j \tau$. On peut alors construire une première application,

$$\zeta := \frac{V^j}{p^{l_\tau}} : \det(\omega_{G^D, \tau}) \longrightarrow \det(\omega_{G^D, \sigma^j \tau})^{(p^j)},$$

où $l_\tau = \sum_{i=1}^j \max(q_\tau - q_{\sigma^i \tau}, 0)$, et une seconde application,

$$\xi := \frac{V^{f-j}}{p^{m_\tau}} : \det(\omega_{G^D, \sigma^j \tau}) \longrightarrow \det(\omega_{G^D, \tau})^{(p^{f-j})},$$

où $m_\tau = \sum_{i=j+1}^f \max(q_\tau - q_{\sigma^i \tau}, 0)$. Alors $l_\tau + m_\tau = k_\tau$ et $\widetilde{\text{Ha}}_\tau = \zeta \otimes \xi^{\otimes (p^j)}$ et donc $\widetilde{\text{Ha}}_\tau$ n'est pas réduit...

10. Compatibilité à la dualité

Soit S un schéma de caractéristique p , et G/S un groupe p -divisible tronqué d'échelon r , muni d'une action de \mathcal{O} , de hauteur h et signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$ (après extension des scalaires). Soit $q \in \{q_\tau : \tau \in \mathcal{I}\}$ une abscisse de rupture de G , et supposons que $r > k_\tau$, pour n'importe quel τ tel que $q = q_\tau$.

Proposition 10.1. — *Il y a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -modules,*

$$\det(\omega_{G^D, q})^{\otimes (p^f - 1)} \simeq \det(\omega_{G, q})^{\otimes (p^f - 1)}.$$

La démonstration suit les mêmes lignes que celle de la proposition 2, 2.2.3 de [Far11].

Démonstration. — Notons

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}xt_{\text{crist}}^1(G^D, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(S \rightarrow S)},$$

le cristal de Dieudonné covariant, évalué sur $(S \xrightarrow{id} S)$, et \mathcal{E}_τ ses facteurs directs, donnés par l'action de \mathcal{O} . On a la suite exacte, avec les notations de l'introduction,

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D, \tau} \longrightarrow \mathcal{E}_\tau \longrightarrow (\omega_{G, \tau})^\vee \longrightarrow 0.$$

Celle-ci s'insère dans un morphisme de suite exactes,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{G^D, \tau} & \longrightarrow & \mathcal{E}_\tau & \longrightarrow & (\omega_{G, \tau})^\vee \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow F \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) V & & \uparrow F \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) V & & \uparrow F \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) V \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{G^D, \sigma^{-1} \tau}^{(p)} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\sigma^{-1} \tau}^{(p)} & \longrightarrow & (\omega_{G, \sigma^{-1} \tau})^{(p), \vee} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme F restreint à $\omega_{G^D, \sigma^{-1} \tau}^{(p)}$ est nul, on en déduit la factorisation,

$$F : (\omega_{G, \sigma^{-1} \tau})^{(p), \vee} \longrightarrow \mathcal{E}_\tau.$$

De même, on peut factoriser,

$$V : \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \omega_{G^D, \sigma^{-1} \tau}^{(p)}.$$

On en déduit un morphisme de complexes (les complexes étant les lignes) qui est exact,

$$\begin{array}{ccccc} & & \omega_{G^D, \tau} & \xrightarrow{V} & \omega_{G^D, \sigma^{-1} \tau}^{(p)} \\ & & \downarrow & & \parallel \\ (\omega_{G, \sigma^{-1} \tau})^{(p), \vee} & \xrightarrow{F} & \mathcal{E}_\tau & \xrightarrow{V} & \omega_{G^D, \sigma^{-1} \tau}^{(p)} \\ & & \downarrow & & \parallel \\ (\omega_{G, \sigma^{-1} \tau})^{(p), \vee} & \xrightarrow{F} & (\omega_{G, \tau})^\vee & & \end{array}$$

On note

$$0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0$$

ce complexe. On a alors $\det(C_1) \otimes \det(C_3) \simeq \det(C_2)$. Or $\det(C_1) \simeq \omega_{G^D, \sigma^{-1}\tau}^{\otimes p} \otimes \omega_{G^D, \tau}^\vee$ et $\det(C_3) \simeq \omega_{G, \tau} \otimes \omega_{G^D, \sigma^{-1}\tau}^{\vee \otimes p}$. De plus, comme C_2 est exact, car G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué, $\det(C_2) \simeq \mathcal{O}_S$, et donc on a un isomorphisme,

$$\varphi_\tau : \omega_{G^D, \sigma^{-1}\tau}^{\otimes p} \otimes \omega_{G^D, \tau}^\vee \xrightarrow{\simeq} \omega_{G, \sigma^{-1}\tau}^{\otimes p} \otimes \omega_{G, \tau}^\vee.$$

En combinant les isomorphismes φ_τ pour tout τ , on obtient un isomorphisme,

$$\varphi_{\sigma^{1-f}\tau}^{\otimes(p^f-1)} \circ \varphi_{\sigma^{2-f}\tau}^{\otimes(p^f-2)} \circ \cdots \circ \varphi_\tau : \omega_{G^D, \tau}^{\otimes(p^f-1)} \xrightarrow{\simeq} \omega_{G, \tau}^{\otimes(p^f-1)}.$$

□

Remarque 10.2. — Cette démonstration n'utilise pas l'hypothèse sur r , elle marcherait pour $r = 1$.

Proposition 10.3. — Notons $d = \sum_\tau p_\tau$ la dimension de G . Supposons $r > d$. Considérons \mathcal{E}_τ , le facteur direct du cristal de G . Alors le Frobenius-cristal,

$$\det(\mathcal{E}_\tau, V^f),$$

se factorise en,

$$(\mathcal{O}_{S/\Sigma}/p^r, p^d) \otimes (\mathcal{L}_\tau, \varphi),$$

où \mathcal{L}_τ est un $(\mathcal{O}_{S/\Sigma})/p^r$ -module localement libre de rang 1 et $(\mathcal{L}_\tau, \varphi)$ est un cristal unité, c'est-à-dire que φ est un isomorphisme, unique modulo p^{r-d} . On peut voir φ comme une section de $\det(\mathcal{E}_\tau)^{\otimes(p^f-1)}$. En particulier, si G est un \mathcal{O} -module p -divisible sur un schéma S sur lequel p nilpotent, au-dessus de \mathcal{O} , alors on peut factoriser,

$$\det(\mathcal{E}_\tau, V^f) = (\mathcal{O}_{X/\Sigma}, p^d) \otimes_{\mathcal{O}} L_\tau,$$

où L_τ est un \mathcal{O} -système local de rang 1, localement trivial pour la topologie étale.

Démonstration. — On va montrer le résultat sur \mathcal{BT}_r , le champ de la section 8, sur lequel on note (encore) G le groupe universel. Tout d'abord pour montrer la première assertion, supposons $r > d$, et il suffit de le faire après tirée en arrière par la présentation $X \longrightarrow \mathcal{BT}_r$, puis de montrer que la factorisation redescend. On a donc G/X un \mathcal{O} -module p -divisible tronqué d'échelon r sur X lisse sur $\mathcal{O}/p = \kappa_F$. Dans ce cas si on considère le cristal $\det \mathcal{E}_\tau$, alors par le même raisonnement que la proposition 4.6, on a l'inclusion de faisceau dans $(X/\Sigma)^{cris}$, $\Sigma = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$,

$$\text{Im}(\det(\text{Fil } \mathcal{E}_{\tau'}) \longrightarrow \det(\mathcal{E}_{\tau'})) \subset J_{X/\Sigma}^{h-q_{\tau'}} \det(\mathcal{E}_{\tau'}).$$

On en déduit par le même raisonnement que le corollaire 4.7, que

$$\det V^f : \det \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \det \mathcal{E}_\tau^{(p)},$$

est divisible (sur les épaissements p -adiques (U, T, δ)) par p^d , puisque,

$$d = \sum_\tau p_\tau = \sum_\tau h - q_\tau.$$

Mais comme $\det \mathcal{E}_\tau$ et $\det \mathcal{E}_\tau^{(p)}$ sont des cristaux, et que $X \otimes \kappa_F$ est lisse, on peut localement le relever en un schéma lisse sur \mathcal{O} , c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement affine $(U \subset X)$ et des épaissements p -adiques (U, T, δ) avec T/Σ affine lisse et $U = T \otimes \kappa_F$. Dans ce cas le théorème 6.6. de [BO78] nous dit que notre morphisme $\det V^f : \det \mathcal{E}_\tau \longrightarrow \det \mathcal{E}_\tau^{(p)}$ est équivalent à un morphisme entre deux modules libres sur \mathcal{O}_T/p^r munis d'une connexion, et comme l'épaississement est p -adique, $\det V^f$ est divisible par p^d .

Il existe donc un unique morphisme de cristaux $\varphi_\tau : \det \mathcal{E}_\tau \pmod{p^{r-d}\mathcal{O}_{X/\Sigma}} \longrightarrow \det \mathcal{E}_\tau^{(p)} \pmod{p^{r-d}\mathcal{O}_{X/\Sigma}}$, tel que $p^d \varphi_\tau = V^f$ (la compatibilité à la connexion est comme dans le théorème 4.9).

Montrons que φ_τ est un isomorphisme. Il suffit de le voir fibres à fibres, et même sur les points géométriques. Considérons alors k un corps algébriquement clos, alors l'application φ_τ sur le cristal se calcule sur le module de Dieudonné sur $\hat{W}(k)$ correspondant, et dans ce cas c'est simplement la théorie des diviseurs élémentaires. L'unicité de φ_τ (modulo p^{r-d}) assure que la construction redescend le long

de $X \longrightarrow \mathcal{BT}_r$ (voir lemme A.5 et théorème 8.4). On a donc une (unique modulo p^{r-d}) décomposition sur \mathcal{BT}_r ,

$$\det(\mathcal{E}_\tau, V^f) = (\mathcal{O}_{\mathcal{BT}_r/\Sigma}, p^d) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{L}_\tau, \varphi_\tau),$$

où \mathcal{L}_τ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{BT}_r/\Sigma}$ inversible, muni d'un isomorphisme,

$$\varphi_\tau : \mathcal{L}_\tau \longrightarrow \mathcal{L}_\tau^{(p^f)},$$

C'est-à-dire un cristal unité. Il est donc associé à un \mathcal{O} -système local de rang 1, L_τ . Le cas d'une base générale S s'en suit par tiré en arrière à partir de \mathcal{BT}_r . \square

Remarque 10.4. — Le \mathbb{F}_{p^f} -système local de rang 1 $L_\tau \pmod{p}$ a donc une monodromie à valeurs dans $\mathbb{F}_{p^f}^\times$, et donc $L_\tau^{\otimes p^f-1}$ est un système local de rang 1 constant, or on a la filtration de Hodge,

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D, \tau} \longrightarrow (\mathcal{E}_\tau)_{\mathcal{BT}_{d+1} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{BT}_{d+1}} \longrightarrow \omega_{G, \tau}^\vee \longrightarrow 0,$$

de telle sorte que $\det(\mathcal{E}_\tau)^{\otimes (p^f-1)}_{\mathcal{BT}_{d+1} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{BT}_{d+1}}$ soit trivial. On en déduit que si S/\mathbb{F}_{p^f} est un schéma, et G un \mathcal{O} -module de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $d+1$ sur S , on a donc un isomorphisme, [KM76],

$$\det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes (p^f-1)} \otimes \det(\omega_{G, \tau})^{\otimes (1-p^f)} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_S,$$

et donc on retrouve la proposition 10.1, sous une hypothèse en plus sur r (la démonstration de la proposition 10.1 fonctionnant pour $r=1$)

$$\det(\omega_{G^D, \tau})^{\otimes (p^f-1)} \simeq \det(\omega_{G, \tau})^{\otimes (p^f-1)}.$$

Lemme 10.5. — Soit $x_r \in \mathcal{BT}_r(k)$, correspondant à un \mathcal{O} -module p -divisible \underline{G}_r tronqué d'échelon r , alors il existe une préimage $x \in \mathcal{BT}_\infty(k)$ de x_r par la flèche,

$$\mathcal{BT}_\infty \xrightarrow{[p^r]} \mathcal{BT}_r.$$

C'est-à-dire qu'il existe \underline{G}/k un \mathcal{O} -module p -divisible (non tronqué) tel que $\underline{G}[p^r] = \underline{G}_r$.

Démonstration. — Comme \mathcal{O} est non ramifié, c'est [Wed01] proposition 3.2. \square

Lemme 10.6. — Soit x_r, x, G comme précédemment. Soit y_r une préimage de x_r par la présentation $X \longrightarrow \mathcal{BT}_r$. Regardons alors le produit fibré,

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi} & \widehat{X}_{y_r} \\ \downarrow p & & \downarrow \\ \text{Def}_{\underline{G}} \otimes k & \longrightarrow & \mathcal{BT}_r \end{array}$$

Alors les flèches p, π sont lisses surjectives. En particulier, les sections ${}^\mu \text{Ha}(\widehat{G}^{\text{univ}})$ et ${}^\mu \text{Ha}(\widehat{G}^{\text{univ}, D})$ coïncident sur \widehat{X}_{y_r} si et seulement si elles coïncident sur D .

Remarque 10.7. — On va donc pouvoir ramener le calcul des invariants de Hasse au calcul sur $\text{Def}_{\underline{G}}$, où l'on a des coordonnées explicites. En particulier, pour montrer que $\widehat{\text{Ha}}(G[p^r]) = \widehat{\text{Ha}}(G[p^r]^D)$, il suffira de le faire sur $\text{Def}_{\underline{G}}$.

Démonstration. — D s'identifie aussi à la complétion formelle du produit fibré de $X \times_{\mathcal{BT}_r} \text{Def}_{\underline{G}}$, et $X \longrightarrow \mathcal{BT}_r$ est surjective, donc p aussi. D'après Illusie, Wedhorn [Wed01] la flèche $\mathcal{BT}_\infty \longrightarrow \mathcal{BT}_r$ est formellement lisse, et donc π aussi. De plus π est surjective puisque \widehat{X}_{y_r} n'a qu'un point. \square

Théorème 10.8. — Supposons fixée une signature $(p_\tau, q_\tau)_\tau$, choisissons un $\tau \in \mathcal{I}$, et notons

$$k_\tau = \sum_{\tau': q_{\tau'} < q_\tau} q_\tau - q_{\tau'} \quad \text{et} \quad k_\tau^D = \sum_{\tau': p_{\tau'} < p_\tau} p_\tau - p_{\tau'}.$$

Soit $r > \max(d, k_\tau, k_\tau^D)$. Sur $\mathcal{BT}_r \otimes \kappa_F$, sous l'isomorphisme,

$$\det \omega_{G^D, \tau}^{\otimes (p^f-1)} \simeq \det \omega_{G, \tau}^{\otimes (p^f-1)},$$

on a l'égalité entre les sections $\widetilde{\text{Ha}}_\tau(G)$ et $\varphi \otimes \widetilde{\text{Ha}}_\tau(G^D)$, où φ est une section inversible déterminée par la proposition précédente. Ceci induit bien sûr une égalité, à une section inversible près, dans $H^0(\mathcal{BT}_r, \det(\omega_{G^D, q_\tau})^{(p^f-1)})$ des sections $\widetilde{\text{Ha}}_{q_\tau}(G)$ et $\widetilde{\text{Ha}}_{p_\tau}(G^D)$, ainsi que des sections $\widehat{\mu}\text{Ha}(G)$ et $\widehat{\mu}\text{Ha}(G^D)$, (pour r est suffisamment grand).

En particulier on en déduit que si G est un \mathcal{O} -module p -divisible tronqué d'échelon r sur \mathcal{O}_C et $r > \max(d, k_\tau(G), k_\tau(G^D)) = \max(d, k_\tau, k_\tau - d + f q_\tau)$, alors,

$$\text{Ha}_\tau(G) = \text{Ha}_\tau(G^D).$$

Démonstration. — Identifions les deux fibrés $\det \omega_{G^D, \tau}^{\otimes (p^f-1)}$ et $\det \omega_{G, \tau}^{\otimes (p^f-1)}$. Comme $X \rightarrow \mathcal{BT}_r$ est lisse surjective, il suffit de voir l'égalité sur X . De plus, comme X est lisse, donc réduit, il suffit de voir que les deux sections coïncident sur un ouvert dense, par exemple le lieu μ -ordinaire, cf [GW10] Corollary 9.9 par exemple. De plus, il suffit de voir que les sections coïncident en chaque anneau local,

$$\mathcal{O}_{X, y_r},$$

pour tout point géométrique $y_r = \text{Spec}(k)$ au dessus de x_r disons, μ -ordinaire, de X . Or la flèche

$$\mathcal{O}_{X, y_r} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X, y_r},$$

est injective (puisque X est localement noetherien (Artin-Rees)), il suffit donc de voir l'égalité sur,

$$\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, y_r}).$$

Mais d'après le lemme précédent, si on note \mathbb{G} un relèvement à \mathcal{BT}_∞ de x_r , et $D = (\text{Def}_{\mathbb{G}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k) \times_{\mathcal{BT}_r} \widehat{X}_{y_r}$, les sections coïncident sur \widehat{X}_{y_r} si elles coïncident sur D . Or on a une flèche,

$$\Phi : D \rightarrow \text{Def}_{\mathbb{G}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k,$$

qui identifie les deux \mathcal{O} -module tronqués universels sur D (ceux provenant de X et $\text{Def}_{\mathbb{G}}$). Or on a un isomorphisme (théorème 9.5),

$$\text{Def}_{\mathbb{G}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k \simeq \text{Spf}(k[[t_{k_i, l_i}^i, i = \{1, \dots, f\}, k_i \in \{1, \dots, p_{\sigma^{i_\tau}}\}, l_i \in \{1, \dots, q_{\sigma^{i_\tau}}\}]]),$$

pour lequel on a un épaissement à puissances divisées $\widehat{W}(k[[t_{k_i, l_i}^i]])$ de $W(k)$, et sur lequel on connaît le cristal de la déformation universelle (cf proposition 9.13). Comme $G^{univ} \times \text{Spec}(k) = \mathbb{G}$ est μ -ordinaire, son cristal (i.e. son module de Dieudonné) se décompose et sa matrice de Verschiebung s'écrit (d'après le théorème de Moonen 8.11) dans une base adaptée à la décomposition $P_0 = \bigoplus_{i=0}^f P_0^{\sigma^i}$ et à la filtration de Hodge,

$$A^b = \begin{pmatrix} 0 & & & A_0^b \\ A_1^b & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & A_{f-1}^b & 0 \end{pmatrix}, \quad A_i^b = \begin{pmatrix} \text{Id}_{q_{\sigma^{i_\tau}}} & \\ & p \text{Id}_{p_{\sigma^{i_\tau}}} \end{pmatrix}.$$

Notons $P = \bigoplus P_\tau$ le cristal sur $\widehat{W}(k[[t_i]])$ du groupe universel G , alors sa matrice de Verschiebung donnée par [Zin02] (87), et la proposition 9.13, est,

$$A = A^b \text{Diag}\left(\begin{pmatrix} \text{Id}_{p_{\sigma^{i_\tau}}} & -[t_{k, l}^i] \\ 0 & \text{Id}_{q_{\sigma^{i_\tau}}} \end{pmatrix}, i = 0, \dots, f-1\right),$$

où A^b est le relèvement trivial de la matrice du Verschiebung de $G \times \text{Spec}(k)$ à $\widehat{W}(k[[t_i]])$. De plus, si on note

$$(5) \quad A_i^{(\varphi^{f-1})} A_{i+1}^{(\varphi^{f-2})} \dots A_{i-2}^{(\varphi)} A_{i-1} = \begin{pmatrix} D_1^i & D_2^i \\ D_3^i & D_4^i \end{pmatrix},$$

avec $D_1^i \in M_{q_{\sigma^{i_\tau}}}(\widehat{W}(k[[t_j]]))$, alors $\text{Ha}_{\sigma^{i_\tau}}(G)$ est donné par $p^{-k_{\sigma^{i_\tau}}} \det D_1^i$ (si $r > k_{\sigma^{i_\tau}}$), d'après la proposition (9.13).

lequel l'action de \mathcal{O} soit donnée par τ . Alors pour tout $A \subset \text{Hom}(F, C)$, on a construit, cf. définition 8.7,

$${}^{\prime\prime}\mathcal{LT}_A = \bigotimes_{\tau \in A}^{\mathcal{O}_K} \mathcal{LT}_{\tau}{}^{\prime\prime},$$

où le produit tensoriel est à prendre au sens du produit tensoriel des displays, et provient d'un \mathcal{O} -module p -divisible de \mathcal{O} -hauteur 1. Sur $k = \overline{\mathbb{F}}_p$, $\mathcal{LT}_A \otimes_{\mathcal{O}} k$ a pour module de Dieudonné, $(W(k)^f, V)$, où

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & \delta_{\sigma\tau} \\ \delta_{\tau} & 0 & & \\ 0 & \delta_{\sigma^{-1}\tau} & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \delta_{\sigma^f-1\tau} \end{pmatrix}, \quad \delta_{\tau'} = \begin{cases} p & \text{si } \tau \in A \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier il est isocline de pente $\frac{|A|}{f}$.

On a alors le lemme suivant,

Proposition 11.1. — *Si G/\mathcal{O}_C est un groupe p -divisible avec une action de \mathcal{O} , où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ et F/\mathbb{Q}_p est non ramifiée, et soit (p_{τ}, q_{τ}) sa signature, et h sa \mathcal{O} -hauteur. Alors G est μ -ordinaire si et seulement si*

$$G \simeq X_{(q_{\tau})}^{\text{ord}} := \prod_{l=1}^{r+1} \mathcal{LT}_{A_{l-1}}^{q^{(l)}-q^{(l-1)}},$$

où l'on note $\{q_{\tau} : \tau \in \text{Hom}(K, C)\} = \{q^{(1)}, \dots, q^{(r)}\}$, $q^{(0)} = 0$ et $q^{(r+1)} = h = p_{\tau} + q_{\tau}$, et pour tout l ,

$$A_l = \{\tau \in \mathcal{I} : q_{\tau} \leq q^{(l)}\} \quad \text{et} \quad A_0 = \emptyset$$

Démonstration. — On sait d'après un théorème de Moonen (8.11) que c'est le cas sur $\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_C = k$ qui est algébriquement clos de caractéristique p . De plus, toujours par Moonen [Moo04], ou par Shen [She12], puisque les polygones de Hodge et Newton coïncident, pour tout $q^{(l)}$ (i.e. tous les points de rupture) on a un sous- \mathcal{O} -module de G , et donc on a une filtration,

$$0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_r = G,$$

telle que les gradués $E_l = G_l/G_{l-1}$, $l \in \{2, \dots, r\}$, sont des \mathcal{O} -modules. Par Moonen,

$$E_l \otimes_{\mathcal{O}_C} k \simeq \mathcal{LT}_{A_{l-1}}^{n_l}, \quad n_l = q^{(l-1)} - q^{(l-2)}.$$

Donc E_l est une déformation sur \mathcal{O}_C d'un $\mathcal{LT}_{A_{l-1}}^{n_l}$. Mais une telle déformation est triviale; en effet, d'après [SW13] elle correspond à un triplet (T, W, α) muni d'une action de \mathcal{O} , c'est à dire comme on connaît la signature et la hauteur, n , à $(\mathcal{O}^n, \bigoplus_{\tau \notin A} C_{\tau}^n, \bigoplus_{\tau} \alpha_{\tau})$. Or la flèche $\alpha_{\tau} : \mathcal{O}^n \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \rightarrow W_{\tau}$ est surjective, donc quitte à changer de base W_{τ} (c'est-à-dire à faire un isomorphisme dans la catégorie des triplets), on peut supposer que le \mathcal{O} -triplet est de la forme,

$$(\mathcal{O}^n, \bigoplus_{\tau \notin A} C_{\tau}^n, \bigoplus_{\tau \notin A} \tau^{\oplus n}).$$

En particulier il n'existe à isomorphisme près sur \mathcal{O}_C qu'un seul tel triplet, et donc $E_l \simeq \mathcal{LT}_{A_{l-1}}^{n_l}$. Donc G est filtré par ce que l'on souhaite, il nous reste seulement à montrer que toute telle filtration est scindée. Mais encore une fois utilisons la description de Scholze-Weinstein de la catégorie des groupes p -divisibles sur \mathcal{O}_C , cf. [SW13] Theorem B, et on se retrouve avec une filtration par des triplets (T, W, α) munis d'une action de \mathcal{O} , telle que le gradué est donné par des (puissances de) triplets de Lubin-Tate généralisés, et le lemme suivant nous dit que la filtration est scindée. \square

Lemme 11.2. — *Soit $C = (T, W, \alpha)$ un triplet de Scholze-Weinstein muni d'une action compatible de \mathcal{O} . Supposons qu'il existe une filtration de C par des \mathcal{O} -triplets,*

$$C_0 = 0 \subset C_1 = (T_1, W_1, \alpha_1) \subset C_2 = (T_2, W_2, \alpha_2) \subset \dots \subset C_r = (T_r, W_r, \alpha_r) = (T, W, \alpha),$$

telle que $C_{i+1}/C_i \simeq (T_{A_i}, W_{A_i}, \alpha_i)^{n_i}$ est le triplet de Scholze-Weinstein de $\mathcal{LT}_{A_i}^{n_i}$, et $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_r$. Alors, C est l'extension triviale des C_{i+1}/C_i . De plus l'application $\alpha : T \rightarrow W$ est E -rationnelle, où E est la composée de tous les E_{A_i} .

Démonstration. — Sans perte de généralité, puisque les T_i sont libres, on peut écrire $T = \mathcal{O}^h, T_i = \mathcal{O}^{m_i}$. Le triplet associé à \mathcal{LT}_A est donné par

$$(\mathcal{O}, W = \bigoplus_{\tau \notin A} C_\tau, \alpha_\tau : \mathcal{O} \longrightarrow C_\tau = \tau).$$

Donc (T_2, W_2) est l'extension de $\mathcal{LT}_{A_1}^{n_1}$ par $\mathcal{LT}_{A_2}^{n_2}$, et donc est donné par,

$$(\mathcal{O}_K^{n_1+n_2}, \bigoplus_{\tau} C^{m_\tau}, (\alpha_\tau)_\tau),$$

où

$$m_\tau = \begin{cases} n_1 + n_2 & \text{si } \tau \notin A_2 \\ n_1 & \text{if } \tau \notin A_1 \setminus A_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\alpha_\tau : \mathcal{O}^{n_1+n_2} \longrightarrow C^{m_\tau} \begin{cases} \left(\begin{array}{cc} I_{n_1} & M_\tau \\ 0 & I_{n_2} \end{array} \right) & \text{si } \tau \notin A_1 \\ \left(\begin{array}{cc} 0_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{array} \right) & \text{si } \tau \in A_1 \setminus A_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais dans le cas non scindé (i.e. $\tau \notin A_1$), en modifiant la base de W_τ , grâce à l'isomorphisme de triplet

$$\left(Id, \left(\begin{array}{cc} Id & -M_\tau \\ & Id \end{array} \right)_\tau \right)$$

on peut rendre la filtration scindée (i.e. $M_\tau = 0$). On peut raisonner identiquement (ou par récurrence) pour montrer

$$(T_i, W_i) = \prod_{k=1}^i C_k / C_{k-1}.$$

□

Remarque 11.3. — C'est faux sans l'hypothèse $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_r$: il existe (sur \mathcal{O}_C) des extensions dans la catégorie des triplets de Scholze-Weinstein de μ_{p^∞} par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ qui ne sont pas triviales (ni ordinaires donc)! Le problème dans l'algorithme précédent est que, en reprenant les notations, si on a $\tau \in A_2 \setminus A_1$, et donc,

$$\alpha_\tau : \mathcal{O}^{n_1+n_2} \longrightarrow C_2^m,$$

qui est donnée par la matrice (I_{n_2}, M_τ) , il faut pouvoir faire le morphisme de triplets,

$$\left(\begin{array}{cc} Id & -M_\tau \\ & Id \end{array} \right)$$

pour rendre α_τ de la forme $(Id, 0)$, ce qui n'est possible que si M_τ est à coefficients dans $\mathcal{O}[1/p]$ (et qui ne dépend pas de τ).

Remarque 11.4. — Le résultat de cette section peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante. Soit S une variété de Shimura PEL sur C (disons celle de la section 9.1, mais plus généralement PEL non ramifiée en p). Regardons $S_\infty \longrightarrow S$ le revêtement adique pro-étale perfectoïde associé à S par Scholze dans [Sch15]. Alors Caraiani et Scholze [CS16] ont construit une application,

$$\pi_{HT} : S_\infty \longrightarrow \mathcal{F}\ell,$$

où $\mathcal{F}\ell$ est une certaine Grassmannienne, qui raffine l'application de Hodge-Tate de [Sch15]. Leur construction est en fait beaucoup plus générale, et remarquons que dans le cas considéré, avec l'aide des structures entières, celle-ci peut se construire de manière beaucoup plus simple. On peut alors interpréter le théorème précédent en disant que le lieu μ -ordinaire de S_∞ est envoyé sur les points E -rationnels de $\mathcal{F}\ell$ (où E est le corps réflexe p -adique associé à (p_τ, q_τ)), ce qui est en fait un cas particulier de la compatibilité entre strates de Newton de S et de $\mathcal{F}\ell$ de [CS16] (dans le cas extrêmement 'basique'—si l'on ose dire, bien qu'il ne s'agisse pas de la strate basique, bien au contraire! — de la strate μ -ordinaire).

Annexe A

Rappels sur les Champs et modules quasi-cohérents

Les résultats de ces appendices n'ont rien d'originaux, mais il semble difficile d'en trouver des références précises dans la littérature, c'est pourquoi on a préféré les réécrire. On renvoie à [LM00] et [DJ⁺13] pour les notions utilisées ici. Soit S un schéma de base. On munit Sch/S de la topologie lisse. Soit $\mathfrak{X} \rightarrow Sch/S$ un champ algébrique, et soit

$$p : X \rightarrow \mathfrak{X},$$

une présentation par un schéma X .

Définition A.1. — Un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module quasi-cohérent \mathcal{E} sur \mathfrak{X} est la donnée, pour tout schéma U dans Sch/S , et pour tout $u \in \mathfrak{X}_U = \mathfrak{X}(U)$, i.e. pour tout morphisme,

$$u : U \rightarrow \mathfrak{X},$$

d'un \mathcal{O}_U -module quasi-cohérent \mathcal{E}_u sur U , tel que, pour toute flèche $U' \xrightarrow{f} U$, on ait un isomorphisme,

$$\alpha_f : f^* \mathcal{E}_u \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{f^*u}.$$

De plus, ces isomorphismes doivent vérifier la condition de cocycle, c'est-à-dire, si on a des flèches,

$$U'' \xrightarrow{g} U' \xrightarrow{f} U,$$

alors, le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_{(f \circ g)^*u} & \xrightarrow{\alpha_g} & g^* \mathcal{E}_{f^*u} & \xrightarrow{g^* \alpha_f} & g^* f^* \mathcal{E}_u \\ & \searrow \alpha_{f \circ g} & & \nearrow \text{can} & \\ & & (g \circ f)^* \mathcal{E}_u & & \end{array}$$

que l'on écrit plus rapidement,

$$\alpha_{f \circ g} = g^* \alpha_f \circ \alpha_g.$$

Un morphisme entre deux modules quasi-cohérents sur \mathfrak{X} , noté

$$\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F},$$

est la donnée, pour tout $U \in Sch/S$, pour tout $u \in \mathfrak{X}_U$, d'un morphisme de \mathcal{O}_U -modules quasi-cohérents,

$$\varphi_u : \mathcal{E}_u \rightarrow \mathcal{F}_u,$$

tel que pour toute flèche, $U' \xrightarrow{f} U$, le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{f^*u} & \xrightarrow{\varphi_{f^*u}} & \mathcal{F}_{f^*u} \\ \alpha_f \uparrow & & \uparrow \beta_f \\ f^* \mathcal{E}_u & \xrightarrow{f^* \varphi_u} & f^* \mathcal{F}_u \end{array}$$

où l'on a noté α . les isomorphismes structuraux de \mathcal{E} , et β . ceux de \mathcal{F} . On note $QCoh(\mathfrak{X})$ la catégorie ainsi définies modules quasi-cohérents sur \mathfrak{X} .

Proposition A.2. — Soit $\mathfrak{X} \rightarrow Sch/S$ un champ algébrique, et soit,

$$p : X \rightarrow \mathfrak{X},$$

une présentation (lisse) par un S -schéma X . Alors la catégorie $QCoh(\mathfrak{X})$ est équivalente à la catégorie des modules quasi-cohérents sur X munis d'une donnée de descente, notée $Des(X)$, c'est à dire, des modules quasi-cohérents F sur X , munis d'un isomorphisme,

$$\varphi : p_1^* F \rightarrow p_2^* F,$$

tel qu'on ait la condition de cocycle,

$$p_{23}^* \varphi \circ p_{12}^* \varphi = p_{13}^* \varphi.$$

On a noté les projections sur les facteurs correspondants,

$$\begin{array}{c} X \times_{\mathfrak{X}} X \times_{\mathfrak{X}} X \\ \downarrow p_{12} \downarrow p_{13} \downarrow p_{23} \\ X \times_{\mathfrak{X}} X \\ \downarrow p_1 \downarrow p_2 \\ X \end{array}$$

Les morphismes de $\text{Des}(X)$ sont les morphismes $h : F \rightarrow G$ tels que,

$$p_2^* h \circ \varphi_F = \varphi_G \circ p_1^* h.$$

C'est à dire tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} p_2^* F & \xrightarrow{p_2^* h} & p_2^* G \\ \varphi_F \uparrow & & \uparrow \varphi_G \\ p_1^* F & \xrightarrow{p_1^* h} & p_1^* G \end{array}$$

Démonstration. — C'est essentiellement une reformulation de la descente fpqc. \square

Remarque A.3. — On a énoncé la proposition pour les modules quasi-cohérents, mais c'est encore vrai en remplaçant quasi-cohérent par localement libre de rang fini, localement libre de rang n fixé (donc aussi inversible), d'après la proposition 2.5.2 de [Gro67], volume 2.

Exemple A.4. — Soit $D \xrightarrow{i} \mathfrak{X}$ un sous-champ fermé d'un champ algébrique. Alors il existe un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module quasi cohérent \mathcal{I}_D associé à D : Soit $U \in \text{Sch}/S$, et $u \in \mathfrak{X}_U$ plat. Alors, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \times_{u, \mathfrak{X}, i} D & \longrightarrow & D \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ U & \xrightarrow{u} & \mathfrak{X} \end{array}$$

et j est une immersion fermée. On a donc un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{D,u}$ sur U associé à $U \times D$. Soit maintenant $U' \xrightarrow{f} U$ plat, alors grâce à l'identification canonique,

$$f^*(U \times D) \cong U' \times_{u \circ f, \mathfrak{X}, i} D,$$

on en déduit un morphisme canonique $\alpha_f : \mathcal{I}_{D, u \circ f} \cong f^* \mathcal{I}_{D, u}$. Comme α_f est canonique, il vérifie la condition de cocycle, et on en déduit donc un faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -module \mathcal{I}_D sur \mathfrak{X} , associé à D , en considérant $U = X$ une présentation de \mathfrak{X} et $U' = X \times_{\mathcal{X}} X$ etc.. en utilisant la proposition précédente. Néanmoins il n'est pas clair (et probablement faux) que pour tout $U \in \text{Sch}/S$ et $u \in \mathfrak{X}_U$ on ait que $\mathcal{I}_{D,u}$ soit l'ideal associé au fermé $D \times_u U$ de U . On voudrait dire que \mathcal{I}_D est un faisceau d'idéaux, seulement on n'est pas certain que pour tout U/S et tout $u \in \mathfrak{X}_U$, $\mathcal{I}_{D,u} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X},u} = \mathcal{O}_u$, mais c'est le cas si u est plat. Néanmoins on a une flèche $\mathcal{I}_D \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, qui est par exemple donnée par l'inclusion de faisceaux sur une présentation de \mathfrak{X} (voir proposition précédente), qui est un monomorphisme sur tout $u : U \rightarrow \mathfrak{X}$ plat. On dira qu'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module \mathcal{I} qui vérifie cette propriété est un faisceau d'idéaux sur \mathfrak{X} .

Lemme A.5. — Si \mathfrak{X} est un champ algébrique lisse, alors dans la donnée d'un faisceau quasi-cohérent sur \mathfrak{X} ou d'un morphisme dans $\text{QCoh}(\mathfrak{X})$, on peut se restreindre au données de la définition, mais seulement sur U, U', U'' des S -schémas lisses (avec les mêmes compatibilités).

Démonstration. — Soit donc S un schéma. Supposons donc que l'on a un champ algébrique $\mathfrak{X} \rightarrow S$ lisse. C'est-à-dire qu'il existe une présentation (lisse),

$$p : X \rightarrow \mathfrak{X},$$

avec X lisse sur S . Supposons maintenant donné pour tout schéma lisse U sur S , et tout $u \in \mathfrak{X}_U$, la donnée d'un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F}_u sur U (avec les compatibilités de la définition A.1 lorsque U', U'' lisses sur S). Alors comme X est lisse, on a la donnée d'un faisceau quasi-cohérent $F := \mathcal{F}_p$ sur X , et muni d'une donnée de descente de la même manière que dans la proposition A.2 (car $X \times_{\mathfrak{X}} X$ et $X \times_{\mathfrak{X}} X \times_{\mathfrak{X}} X$ sont des schémas lisses sur S). On en déduit donc que F est dans $Des(X)$, et donc qu'il existe un unique faisceau quasi-cohérent sur \mathfrak{X} , $\tilde{\mathcal{F}}$, qui lui correspond. Par construction, $\mathcal{F}_u \simeq (\tilde{\mathcal{F}})_u$ (canoniquement) pour tout $u : U \rightarrow \mathfrak{X}$ avec U lisse sur S . Soit maintenant pour tout U/S lisse, et tout $u \in \mathfrak{X}_U$, des faisceaux quasi-cohérents \mathcal{F}_u et \mathcal{G}_u sur U , et d'un morphisme,

$$\varphi_u : \mathcal{F}_u \rightarrow \mathcal{G}_u,$$

avec les compatibilités de la définition A.1, pour tout U', U'' lisses sur S . Alors comme X est lisse, il existe un morphisme,

$$\varphi_p : F \rightarrow G, \quad \text{où } F = \mathcal{F}_p, G = \mathcal{G}_p.$$

On a vu que F, G sont dans $Des(X)$ et de plus, comme dans la proposition A.2, φ_p est un morphisme dans $Des(X)$. On en déduit donc qu'il existe un unique morphisme,

$$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$$

dans $QCoh(\mathfrak{X})$ tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}_u & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_u} & \tilde{\mathcal{G}}_u \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{F}_u & \xrightarrow{\varphi_u} & \mathcal{G}_u \end{array}$$

pour tout $u \in \mathfrak{X}_U$ avec U lisse sur S . □

On utilise ce dernier lemme pour construire les invariants de Hasse partiel sur le champ des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon r , munis d'une action de \mathcal{O}_F , car ces derniers ne sont définis (à priori) que sur une base lisse.

Annexe B

Diviseurs de Cartier et Champs

Soit \mathfrak{X} un champ sur S , suivant [LM00], on définit son espace topologique sous-jacent,

$$|\mathfrak{X}| = \left(\coprod_{K \text{ corps}} \text{ob } \mathfrak{X}_{\text{Spec } K} \right) / \sim,$$

où $u \sim v$, $u \in \mathfrak{X}_{\text{Spec } K}$, $v \in \mathfrak{X}_{\text{Spec } K'}$ si il existe une extension commune K'' de K, K' , $i : K \subset K''$, $j : K' \subset K''$ et un isomorphisme de i^*u sur j^*v dans $\mathfrak{X}_{\text{Spec } K''}$. On munit $|\mathfrak{X}|$ de la topologie de Zariski, donnée par les $|\mathfrak{U}|$, où \mathfrak{U} est un sous-champ ouvert.

Définition B.1. — Soit S un schéma, et \mathfrak{X} un champ algébrique sur Sch/S . Soit $D \subset \mathfrak{X}$ un sous-champ fermé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes (voir exemple A.4) :

1. \mathcal{I}_D est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module inversible.
2. Il existe $X \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$, avec X un schéma, surjectif et lisse tel que $D \times_{\mathfrak{X}} X$ est un diviseur de Cartier sur X .
3. Pour tout $X \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$, avec X un schéma, surjectif et lisse, $D \times_{\mathfrak{X}} X$ est un diviseur de Cartier sur X .

4. Il existe un recouvrement affine lisse quasi-compact i.e. pour tout $x \in \mathfrak{X}$, des voisinages lisses $U \rightarrow \mathfrak{X}$ de x , tel que si $U = \text{Spec } A$, alors $D \times_{\mathfrak{X}} U = \text{Spec}(A/(f))$ et $f \in A$ n'est pas un diviseur de zéro.

Dans ce cas, on dit que D est un *Diviseur de Carter effectif* de \mathfrak{X} .

Démonstration. — $1 \Rightarrow 3$: On a donc \mathcal{I}_D un faisceau inversible, donc $p^*\mathcal{I}_D$ est un faisceau inversible sur X . Donc $D \times_{\mathfrak{X}} X$ est un diviseur de Cartier sur X , car p est lisse donc plat.

$2 \Rightarrow 1$: On a donc sur X l'existence d'un $(\mathcal{I}_D)_p \subset \mathcal{O}_X$ qui est un faisceau d'idéaux inversible associé à $D \times_{\mathfrak{X}} X$, munie d'une donnée de descente par la proposition A.2. De plus, par la remarque A.3, \mathcal{I}_D est inversible.

$2 \Rightarrow 4$: Soit $X \rightarrow \mathfrak{X}$ lisse surjectif une présentation par un schéma. Prenons un ouvert de X , $U \rightarrow X$, avec $U = \text{Spec } A$ affine. Alors,

$$D \times_{\mathfrak{X}} U = (D \times_{\mathfrak{X}} X) \times_X U = \text{Spec}(A/(f)),$$

avec (f) non diviseur de zéro, car $D \times_{\mathfrak{X}} X$ est un diviseur de Cartier sur X . De plus, comme $X \rightarrow \mathfrak{X}$ est lisse, donc quasi-compact, le recouvrement précédent est quasi-compact.

$4 \Rightarrow 2$: On écrit un morphisme surjectif, et localement lisse, donc plat quasi-compact,

$$U = \coprod_{x \in |\mathfrak{X}|} U_x \rightarrow \mathfrak{X}.$$

Ce morphisme n'est pas lisse a priori, mais quitte à prendre une présentation $p : X \rightarrow \mathfrak{X}$, $\coprod_{x \in |\mathfrak{X}|} (U_x \times_{\mathfrak{X}} X)$ est un recouvrement localement lisse de X , donc on peut extraire un recouvrement U' quasi-compact, puisque X est quasi-séparé. Maintenant le morphisme

$$U' \rightarrow \mathfrak{X},$$

est quasi-compact, plat et surjectif, et $D \times_{\mathfrak{X}} U'$ est localement un diviseur de Cartier (sur chaque U_x) par hypothèse, $D \times_{\mathfrak{X}} X$ est donc un diviseur de Cartier sur X . \square

Remarque B.2. — Soit \mathfrak{X} un champ algébrique, $X \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$ une présentation. Alors on a une surjection d'espaces topologiques,

$$|X| \xrightarrow{|p|} |\mathfrak{X}|.$$

D'après [LM00], Proposition 5.6, $|p|$ est un morphisme ouvert. Plus précisément pour tout 1-morphisme de champs, plat localement de présentation finie, f , $|f|$ est ouvert.

Proposition B.3. — Soit \mathfrak{X} un champ algébrique. On a une équivalence de catégories,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diviseurs de cartier effectifs} \\ \text{de } \mathfrak{X} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} s : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{L} \text{ où} \\ \mathcal{L} \text{ est un faisceau inversible et} \\ s \text{ génériquement trivialisante.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} D & \longmapsto & (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{I}_D^{\vee}) \\ V(s) \subset \mathfrak{X} & \longleftarrow & (s : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}) \end{array}$$

où $V(s)$ est un sous-schéma fermé de \mathfrak{X} donné par,

$$V(s)_U = \{u \in \mathfrak{X}_U : u^*s = 0\}.$$

Démonstration. — C'est vrai sur un schéma ([DJ⁺13] DIVISORS lemma 2.20). On se ramène à ce cas en considérant une présentation : il suffit de combiner la définition précédente avec la proposition A.2 (voir aussi remarque A.3). \square

Proposition B.4. — Soit \mathfrak{X} un champ algébrique réduit (i.e. tel qu'il existe une présentation $X \xrightarrow{p} \mathfrak{X}$ avec X un schéma réduit). Soit $V(s)$ le sous-champ fermé de \mathfrak{X} associé à un couple (\mathcal{L}, s) où $s : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{L}$ est une section. Notons $D(s)$ le sous-champ ouvert de \mathfrak{X} défini par,

$$D(s)_U = \{u \in \mathfrak{X}_U : u^*s : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_u\}.$$

Alors $V(s)$ est un diviseur de Cartier si et seulement si $|D(s)|$ est dense dans $|\mathfrak{X}|$.

Démonstration. — Soit $p : X \rightarrow \mathfrak{X}$ une présentation (réduite) de \mathfrak{X} . Supposons que $V(s)$ soit un diviseur de Cartier, alors $p^*V(s)$ est un diviseur de Cartier sur X , donc $X \setminus p^*V(s)$ est un ouvert dense (car X réduit) et comme $|p|$ est ouverte et surjective, $|p|(X \setminus p^*V(s)) = |D(s)|$ (car p surjectif) est un ouvert dense.

Réciproquement, si $|D(s)|$ est dense, $|p|^{-1}(|D(s)|) = |X \setminus p^*V(s)|$ est un ouvert dense de X , donc $p^*V(s)$ est un diviseur de Cartier sur X , et la définition B.1 conclut. \square

Remarque B.5. — Être réduit pour un champ ne dépend pas de la présentation : Si $(X, \pi_1), (X', \pi_2)$ sont deux présentations de \mathfrak{X} et X est réduit, alors $X \times_{\mathfrak{X}} X' = \pi_2^*X$ est un schéma (car π_1 relativement représentable) et $X \times_{\mathfrak{X}} X'$ est réduit car X l'est et π_2 est lisse (donc $\pi_1^*\pi_2$ aussi). Donc comme $\pi_2^*\pi_1 : X \times_{\mathfrak{X}} X' \rightarrow X'$ est lisse, X' est réduit.

Références

- [AG04] Fabrizio Andreatta et Eyal Z. Goren : Hilbert modular varieties of low dimension. *In Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 113–175. Berlin : Walter de Gruyter, 2004.
- [AIS14] Fabrizio Andreatta, Adrian Iovita et Glenn Stevens : Overconvergent modular sheaves and modular forms for GL_2/F . *Isr. J. Math.*, 201:299–359, 2014.
- [BBM82] Pierre Berthelot, Lawrence Breen et William Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [BH16] Stéphane Bijakowski et Valentin Hernandez : Groupes p -divisibles avec condition de pappas-rapoport et invariants de hasse. *arXiv preprint arXiv :1611.10110*, 2016.
- [Bij16] Stéphane Bijakowski : Compatibility with duality for partial Hasse invariants. *preprint*, 2016.
- [BO78] Pierre Berthelot et Arthur Ogus : *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, Princeton, NJ., 1978.
- [Box15] George Boxer : Torsion in the coherent cohomology of shimura varieties and galois representations. *arXiv preprint arXiv :1507.05922*, 2015.
- [Che15] Miaofen Chen : Périodes entières de groupes p -divisibles sur une base générale. *Bull. Soc. math. France*, 143(1):1–33, 2015.
- [CS16] Ana Caraiani et Peter Scholze : On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties. *preprint*, 2016.
- [DJ⁺13] Aise Johan De Jong *et al.* : The stacks project. *Algebraic stacks-Examples*, 2013.
- [DS74] Pierre Deligne et Jean-Pierre Serre : Formes modulaires de poids 1. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 7:507–530, 1974.
- [Far04] Laurent Fargues : Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de langlands locales. *Astérisque*, (291):1–200, 2004.
- [Far11] Laurent Fargues : La filtration canonique des points de torsion des groupes p -divisibles. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(6):905–961, 2011. With collaboration of Yichao Tian.
- [FGI⁺05] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure et Angelo Vistoli : *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Grothendieck's FGA explained.
- [Fon77] Jean-Marc Fontaine : *Groupes p -divisibles sur les corps locaux*. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Astérisque, No. 47-48.
- [GdMDm74] Alexandre Grothendieck et Université de Montréal. Département de mathématiques : *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*. Presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [GK15] Wushi Goldring et Jean-Stefan Koskivirta : Strata hasse invariants, hecke algebras and galois representations. *arXiv preprint arXiv :1507.05032*, 2015.
- [GN13] Wushi Goldring et Marc-Hubert Nicole : $A \setminus \mu$ -ordinary hasse invariant. *arXiv preprint arXiv :1302.1614*, 2013.
- [Gro67] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : Iv. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, quatrième partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 32:5–361, 1967.
- [GW10] Ulrich Görtz et Torsten Wedhorn : *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. Schemes with examples and exercises.
- [Ham13] Paul Hamacher : The geometry of newton strata in the reduction modulo p of shimura varieties of pel type. *arXiv preprint arXiv :1312.0490*, 2013.

- [Her] Valentin Hernandez : La filtration canonique des \mathcal{O} -modules p -divisibles. *en preparation*.
- [Hid86] Haruzo Hida : Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 19(2):231–273, 1986.
- [HW36] Helmut Hasse et Ernst Witt : Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p . *Monatsh. Math. Phys.*, 43:477–492, 1936.
- [Kat73] Nicholas M. Katz : p -adic properties of modular schemes and modular forms. Modular Functions of one Variable III, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 350, 69–190 (1973), 1973.
- [Kat79] Nicholas M. Katz : Slope filtration of F -crystals. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Vol. I, volume 63 de *Astérisque*, pages 113–163. Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [Kat81] N. Katz : Serre-tate local moduli. In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 de *Lecture Notes in Math.*, pages 138–202. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [KM76] Finn Knudsen et David Mumford : The projectivity of the moduli space of stable curves. i. preliminaries on “det” and “div”. *Math. Scand*, 39(1):19–55, 1976.
- [Kot92] Robert E. Kottwitz : Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Am. Math. Soc.*, 5(2):373–444, 1992.
- [KW14] Jean Stefan Koskivirta et Torsten Wedhorn : Generalized Hasse invariants for Shimura varieties of Hodge type. *preprint*, 2014.
- [Lau14] Eike Lau : Relations between Dieudonné displays and crystalline Dieudonné theory. *Algebra Number Theory*, 8(9):2201–2262, 2014.
- [LM00] Gérard Laumon et Laurent Moret-Bailly : *Champs algébriques*. Berlin : Springer, 2000.
- [Moo04] Ben Moonen : Serre-Tate theory for moduli spaces of PEL type. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 37(2):223–269, 2004.
- [MV10] Elena Mantovan et Eva Viehmann : On the Hodge-Newton filtration for p -divisible \mathcal{O} -modules. *Math. Z.*, 266(1):193–205, 2010.
- [Pill12] Vincent Pilloni : Sur la théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g} . *Bull. Soc. Math. Fr.*, 140(3):335–400, 2012.
- [Pill13] Vincent Pilloni : Formes modulaires surconvergentes. *Ann. Inst. Fourier*, 63(1):219–239, 2013.
- [RR96] M. Rapoport et M. Richartz : On the classification and specialization of F -isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2):153–181, 1996.
- [RZ96] M. Rapoport et Th. Zink : *Period spaces for p -divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [Sch15] Peter Scholze : On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. *Ann. Math. (2)*, 182(3):945–1066, 2015.
- [SGA72] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [Shel12] Xu Shen : On the hodge-newton filtration for p -divisible groups with additional structures. *arXiv preprint arXiv :1203.2541*, 2012.
- [SW13] Peter Scholze et Jared Weinstein : Moduli of p -divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2):145–237, 2013.
- [VW13] Eva Viehmann et Torsten Wedhorn : Ekedahl-Oort and Newton strata for Shimura varieties of PEL type. *Math. Ann.*, 356(4):1493–1550, 2013.
- [Wed99] Torsten Wedhorn : Ordinarity in good reductions of Shimura varieties of PEL-type. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 32(5):575–618, 1999.
- [Wed01] Torsten Wedhorn : The dimension of Oort strata of Shimura varieties of PEL-type. In *Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999)*, volume 195 de *Progr. Math.*, pages 441–471. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [Zin01] Thomas Zink : A Dieudonné theory for p -divisible groups. In *Class field theory – its centenary and prospect. Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, June 3–12, 1998*, pages 139–160. Tokyo : Mathematical Society of Japan, 2001.
- [Zin02] Thomas Zink : The display of a formal p -divisible group. In *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques (I)*, pages 127–248. Paris : Société Mathématique de France, 2002.