Exercice 3.3 :

1) Notons D la droite engendrée par $v = (1,2,-1)$: $D = \mathrm{Vect}(v)$.

Alors $u := (x,y,z) \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$: système d'inconnue λ

$\iff \begin{cases} \lambda = x \\ 2\lambda = y \\ -\lambda = z \end{cases}$ a une solution

$\iff \begin{cases} \lambda = x \\ 0 = y - 2x \\ 0 = z + x \end{cases}$ a une solution $\iff \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ équations !

Donc les équations de D sont $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$

Remarque : D est de dimension 1, dans $\mathbb{R}^3$ (de dim. 3)

Il faut donc $3 - 1 = 2$ équations pour décrire D !

2) $P = \mathrm{Vect}(u, v)$

Remarque : Vous pouvez vérifier que u et v sont non-colinéaire, donc $\dim P = 2$, c'est un plan ! ($\rightarrow$ 1 équation cartésienne)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = -3\lambda + \mu \end{cases}$: système d'inconnues λ, μ.

$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ 2\lambda - \mu = y \\ -3\lambda + \mu = z \end{cases}$ a une solution

$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ -3\mu = y - 2x \\ 4\mu = z + 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ -3\mu = y - 2x \\ 0 = 4(y-2x) + 3(z+3x) \quad (L_3 \leftarrow 3L_3 + 4L_2) \\ \quad = x + 4y + 3z \end{cases}$ a une solution

$\iff (x + 4y + 3z = 0)$

Donc P a pour équation $x + 4y + 3z = 0$.

Exercice 4 :

1) Remarque : On parle plutôt de la famille S plutôt que dire suite.

Resolvons $\lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4 = 0$

$$\Leftrightarrow (S)\begin{cases} \lambda+\mu+2\gamma+0=0 \\ -2\lambda+\mu-\gamma+3\delta=0 \\ \lambda+2\mu+3\gamma+\delta=0 \\ -2\lambda+2\mu+0+4\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+2\gamma=0 \\ 3\mu+3\gamma+3\delta=0 \\ \mu+\gamma+\delta=0 \\ 4\mu+4\gamma+4\delta=0 \end{cases}$$ 3 lignes identiques

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+2\gamma=0 \\ \mu+\gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\gamma-\delta=0 \\ \mu+\gamma+\delta=0 \end{cases}$$

On peut alors poser $\delta=1$, $\gamma=0$ puis $\mu=-1$, $\lambda=1$.

$\rightarrow$ $\underline{u_1 - u_2 + u_4 = 0}$ (Verifiez que ça marche).

2) D'après la proposition 2.6.13 du cours, il suffit d'identifier les pivots dans le système (S) précédent : ce sont λ et μ.

Autrement dit, (u_1, u_2) sont une base de $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)=E$ d'après le cours : donc $E=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ (car (u_1,u_2) generatrice).

Cherchons à quelle conditions $v=(x,y,z,t)\in E$.

$$\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in E \text{ tq } \begin{cases} \lambda+\mu=x \\ -2\lambda+\mu=y \\ \lambda+2\mu=z \\ -2\lambda+2\mu=t \end{cases}$$ (système d'équations λ,μ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=x \\ 3\mu=y+2x \\ \mu=z-x \\ 4\mu=t+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=x \\ 0=y+2x-3(z-x) \quad (L_2\leftarrow L_2-3L_3) \\ \mu=z-x \\ 0=t+2x-4(z-x) \quad (L_4\leftarrow L_4-4L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=x \\ \mu=z-x \\ 0=5x+y-3z \\ 0=6x-4z+t \end{cases}$$

Donc les équations de E sont $\begin{cases} 0=5x+y-3z \\ 0=6x-4z+t \end{cases}$

Rq: Comme P est de dimension 2, dans $\mathbb{R}^4$, il faut bien $4-2=2$ équations.

3) Ajoutons $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ à (u_1, u_2) et voyons si on obtient une base de $\mathbb{R}^4$.

Libre: Si $\lambda u_1 + \mu u_2 + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ (*)

$\Leftrightarrow v := \begin{pmatrix}0\\0\\z\\t\end{pmatrix} = -\lambda u_1 - \mu u_2$ Donc $\begin{pmatrix}0\\0\\z\\t\end{pmatrix} \in E$.

Or d'après les équations de E, comme $x=y=0$ pour v, on en déduit $\begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}$.

On a donc $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$, or (u_1, u_2) est libre (base de E) donc $\lambda = \mu = 0$: donc l'unique solution de (*) est $\lambda = \mu = z = t = 0$: la famille $\left(u_1, u_2, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Comme cette famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre, et possède $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^4$!

Exercice 3.5: D'après la proposition 2.6.11, si $V \subset W$ sont deux espaces vectoriels, on a

- $\dim V \leq \dim W$
- Si $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$.

Autrement dit, la dimension d'un SEV est plus petite que la dimension du plus gros espace, et ils sont égaux si les dimensions sont les mêmes.

Ex: dans $\mathbb{R}^2$, on a comme SEV: $\{0\}$, des droites, $\mathbb{R}^2$.

$\dim \{0\} = 0 \leq \dim \text{Droite} = 1 \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2.$

et le seul plan inclus dans $\mathbb{R}^2$... est $\mathbb{R}^2$ entier !

· Comme $H \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim H \leq 4.$

et comme $H \neq \mathbb{R}^4$, $\dim H < 4$

· Comme $\{0\} \subset E$ (car E SEV) $\dim E \geq 0$

et comme $\{0\} \neq E$, $\dim E > 0.$

Supposons, par l'absurde, que E, F, G, H sont deux à deux distincts, alors les inégalités de dimensions sont strictes, i.e.

$$\dim E < \dim F < \dim G < \dim H.$$

Or la dimension est un entier, donc $\dim E > 0$ implique $\dim E \geq 1$, $\dim H < 4$ implique $\dim H \leq 3$

On a donc 4 entiers distincts entre 1 et 3 : absurde !

Donc deux SEV parmi E, F, G, H sont égaux

(Il n'est pas possible que de caler 4 entiers différents entre 1 et 3... il n'y en a que 3 : 1, 2, 3).

Ex 6 : Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque : On peut tout de suite voir que

$$e_5 = 5e_3 - 2e_4$$

pour s'éviter des calculs (alors $E_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$)

$E+F = \{ v + w \mid v \in E, w \in F \}$ $(E = E_1, F = E_2)$

Prop : $E+F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = V$

Demo : Soit $v = \lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 + \varepsilon e_5 \in V$

Alors $v = (\lambda e_1 + \mu e_2) + (\gamma e_3 + \delta e_4 + \varepsilon e_5) \in E+F$

Réciproquement,

Soit $v = e + f \in E + F$, avec $e \in E$, $f \in F$.

$e = \lambda e_1 + \mu e_2$ car (e_1, e_2) engendre E

$f = \gamma e_3 + \delta e_4 + \varphi e_5$ car (e_3, e_4, e_5) engendre F

Donc $v = \lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 + \varphi e_5 \in E + F$

$\in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. $\square$.

Pour trouver une base, on ~~[illegible]~~ cherche les pivots de

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 + \varphi e_5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu + \gamma + \delta + 3\varphi = 0 \\ -\mu + \gamma + 2\delta + \varphi = 0 \\ \lambda + 6\mu + 2\gamma + 2\delta + 6\varphi = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (L_4) \\ 4\mu + \gamma + \delta + 3\varphi = 0 & (L_1 - L_4) \\ -\mu + \gamma + 2\delta + \varphi = 0 & (L_2) \\ 5\mu + 2\gamma + 2\delta + 6\varphi = 0 & (L_3 - L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 5\gamma + 9\delta + 7\varphi = 0 \\ -\mu + \gamma + 2\delta + \varphi = 0 \\ 7\gamma + 12\delta + 11\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\mu + \gamma + 2\delta + \varphi = 0 \\ 5\gamma + 9\delta + 7\varphi = 0 \\ 3\delta - 6\varphi = 0 \; (7 \times L_2 - 5 \times L_4) \end{cases}$$

Donc les pivots sont $\lambda, \mu, \gamma, \delta$, ie.

(e_1, e_2, e_3, e_4) forment une base de $E_1 + E_2 = \text{Vect}(e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5)$.

Soit $v \in E_1 \cap E_2$. Donc $v = \lambda e_1 + \mu e_2 = \gamma e_3 + \delta e_4$ (car $e_5 = 5e_3 - 2e_4$ pour simplifier les calculs.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu - \gamma - \delta = 0 \\ -\mu - \gamma - 2\delta = 0 \\ \lambda + 6\mu - 2\gamma - 2\delta = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 4\mu - \gamma - \delta = 0 \; (L_2 - L_4) \\ -\mu - \gamma - 2\delta = 0 \\ 5\mu - 2\gamma - 2\delta = 0 \; (L_3 - L_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \mu+\gamma+2\delta=0 \\ -5\gamma-9\delta=0 \quad (L_2+4L_3) \\ -7\gamma-12\delta=0 \quad (L_4+5L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \mu+\gamma+2\delta=0 \\ -5\gamma-9\delta=0 \\ 3\delta=0 \quad (7\times L_3-5L_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \gamma=0 \\ \delta=0 \end{cases}$$ Donc $v=0$, donc $E_1\cap E_2=\{0\}$.

Remarque: On pouvait remarquer que $\dim E_1=\dim E_2=2$

(évident car $e_5=5e_3+2e_4$, et (e_1,e_2) libre, (e_3,e_4) aussi).

Comme $E_1+E_2\subset\mathbb{R}^4$ a pour ~~base~~ base $(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$,

$\Rightarrow \dim E_1+E_2=4 \Rightarrow E_1+E_2=\mathbb{R}^4$.

Or on a $\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim E_1\cap E_2$

donc $\dim E_1\cap E_2=\underbrace{\dim E_1}_{2}+\underbrace{\dim E_2}_{2}-\underbrace{\dim E_1\cap E_2}_{4}$

$\Rightarrow E_1\cap E_2=\{0\}$.

Par définition, comme $E_1\cap E_2=\{0\}$, E_1 et E_2 sont en <u>somme directe</u>.

De plus, comme $E_1+E_2=\mathbb{R}^4$, on a $E_1\oplus E_2=\mathbb{R}^4$,

donc E_1 et E_2 sont <u>supplémentaires</u>.