CORRIGÉ DE LA FEUILLE 4

0.1 Calculs de développements limites en 0

Remarques : L'idée générale est la suivante. On connait quelques développements limités (DL) de base grâce à la formule de Taylor-Young. Mais le plus souvent, on reconnait dans la fonction à développer une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions dont on connait déjà le développement limité.

Exercice 1 (Sommes et produits). *Indice : se servir des DL de* exp, sin, cos, $\frac{1}{1-x}$ *et* $(1+x)^\alpha$.

1. *On donne le DL des deux fonctions* $\frac{1}{1-x}$ *et* e^x *à l'ordre 4 en 0. Il existe donc* ε_1 *et* ε_2 *qui tendent vers 0 vers 0*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - e^x &= \left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^4\varepsilon_1(x)\right) - \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{23}{24}x^4+x^4\varepsilon(x),\end{aligned}$$

   où $\varepsilon := \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ *qui tend bien vers 0 en 0.*

2. *On écrit le DL en 0 de* cos *à l'ordre 4 et de* sin *à l'ordre 3, d'où l'existence de* ε_1 *et* ε_2 *qui tendent vers 0 vers 0 :*

$$\begin{aligned}\cos x - 1 + \frac{x}{2}\sin x &= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_1(x)\right) - 1 + \frac{x}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^5\varepsilon_2(x)\right)\\ &= -\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)\end{aligned}$$

   où $\varepsilon := \varepsilon_1 - x\varepsilon_2$ *qui tend bien vers 0 en 0.*

3. *Ici on écrit le DL de* $u \mapsto \sqrt{1+u}$ *en 0 à l'ordre 2 avec* $u(x) = x^2$ *(qui tend bien vers 0 en 0). Il existe donc* ε_0 *qui tend vers 0 en 0 telle que :*

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u(x)} &= 1+\frac{1}{2}u(x)+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2!}u(x)^2+u(x)^2\varepsilon_0(u(x))\\ &= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+x^4\varepsilon_0(x^2).\end{aligned}$$

   Enfin

$$(x+1)\sqrt{1+u(x)} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{8}+x^4\underbrace{\varepsilon_0(x^2)(1+x)}_{=:\varepsilon(x)},$$

   et ε *tend bien vers 0 en 0 (du fait de la définition de* ε_0*).*

4. *Le DL de* $\sin x \cos x$ *est fait dans le poly de cours. Mais voici le détail : Écrivons les DL de* sin *et* cos *à l'ordre 4*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_1(x)$$

   et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon_2(x).$$

Et en faisant le produit

$$
\begin{aligned}
\cos x \sin x = x \qquad & - \frac{x^3}{3!} \qquad\qquad + x^4 \varepsilon_1(x) \\
& - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!} x^3 + x^4 \tilde{\varepsilon}(x) \\
= x - \frac{2}{3} x^3 + x^4 & \underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{\to 0 \\ x \to 0}}
\end{aligned}
$$

Remarque. *On peut aussi remarquer que* $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ *et plus écrire le développement de Taylor de* $\sin(2.)$ *en sachant que les dérivées d'ordres paires sont nulles.*

5. *On écrit le DL en 0 à l'ordre 4 des deux termes du produit.*

$$
\begin{aligned}
e^x \sqrt{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_1(x)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + x^4 \varepsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + x^4 \varepsilon_2(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}_1(x) \\
&\quad - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{8} x^3 - \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}_2(x) \\
&\quad \frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{16} x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}_3(x) \\
&\quad - \frac{5}{128} x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}_4(x) + x^8 \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{8} x^2 + \frac{17}{48} x^3 + \frac{11}{128} x^4 + x^4 \underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{\to 0 \\ x \to 0}}.
$$

Exercice 2 (Quotient et composition). 1. *Indice : écrire* $1/\cos$ *comme le DL de* $\frac{1}{1-u}$ *en 0. On écrit déjà le DL en 0 de* $\sin$ *et* $\cos$ *à l'ordre 4 (*ε_1 *et* ε_2 *tendent vers 0 en 0)*

$$
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} x^4 + x^4 \varepsilon_2(x)}.
$$

On remarque ensuite que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u(x)}$ *avec*

$$
u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24} x^4 - x^4 \varepsilon_2(x).
$$

En écrivant le DL en 0 à l'ordre 2 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= 1 + u(x) + u(x)^2 + \underbrace{u(x)^2 \varepsilon_3(u(x))}_{x^4 \varepsilon_4(x)} \\
&= 1 \\
&\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^4 \varepsilon_2(x) \\
&\quad + \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_5(x) + x^4 \varepsilon_6(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4 \varepsilon_7(x)
\end{aligned}
$$

Puis en faisant le produit et une petite troncature

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x).$$

On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young.

2. *En posant* $u(x) = x - x^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x+x^2} &= \frac{1}{1-u(x)} \\ &= 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + u(x)^4 + \underbrace{u(x)^4\varepsilon_0(u(x))}_{=\tilde{\varepsilon}_0(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x+x^2} &= 1 \\ &\quad + x - x^2 \\ &\qquad + x^2 - 2x^3 + x^4 \\ &\qquad\quad x^3 - 3x^4 \qquad + x^4\tilde{\varepsilon}_3(x) \\ &\qquad\qquad + x^4 \qquad + x^4\tilde{\varepsilon}_4(x) + x^4\tilde{\varepsilon}_(x) \\ &= 1 + x - x^3 - x^4 + x^4\underbrace{\varepsilon_0(x)}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}}\end{aligned}$$

3. *Après avoir écrit le DL en 0 de* sin *à l'ordre 4, que l'on injecte dans celui de* exp

$$\exp(\sin(x)) = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^4}{24} + \underbrace{(\sin x)^4\varepsilon(\sin x)}_{=x^4\varepsilon_0(x)}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \\ &\quad + x \qquad - \frac{1}{6}x^3 \qquad\qquad + x^4\tilde{\varepsilon}_1(x) \\ &\qquad + \frac{1}{2}x^2 \qquad - \frac{1}{6}x^4 \quad + x^4\tilde{\varepsilon}_2(x) \\ &\qquad\quad \frac{1}{6}x^3 \qquad\qquad + x^4\tilde{\varepsilon}_3(x) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{24}x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}_4(x) + x^4\tilde{\varepsilon}_0(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}}.\end{aligned}$$

4. *On écrit le DL de* sin *en 0 à l'ordre 5 d'où*

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} &= \sqrt{\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_0(x)}{x}} = \sqrt{1 + u(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u(x)^2 + \underbrace{u(x)^2\varepsilon_0(u(x))}_{=x^4\tilde{\varepsilon}_0(x)}\end{aligned}$$

avec

$$u(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon_0(x).$$

D'où, on tronquant violemment

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} =& 1 \\ & - \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{120}x^4 + x^4\varepsilon_0(x) \\ & \qquad - \frac{1}{8} \times \frac{1}{6^2}x^4 \quad + x^4\varepsilon_1(x) \\ & \qquad\qquad + x^4\tilde{\varepsilon}_2(x) \\ =& 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + x^4\underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}}.\end{aligned}$$

Exercice 3 (Intégration)**.** *Le but de cette exercice est d'appliquer rigoureusement la Proposition* 4.11 *l'intégration des DL du cours.*

On commence par remarquer que les fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$ *et* $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ *sont sur un petit intervalle* I *contenant* 0 *donc admettent par la formule de Taylor-Young un DL à toutes ordre en* 0, *et donc a fortiori à l'ordre* 4.

1. — *On commence par remarquer que*

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 *de de* $\ln(1+x)$ *il nous faut intégrer un DL à l'ordre* 3 *de* $\frac{1}{1+x}$.

— *Ensuite on remarque que le DL de* $\frac{1}{1+x}$ *peut être obtenu du DL usuel de* $\frac{1}{1-x}$, ***qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement****, par un changement de variable* $x \to -x$. *On écrit*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon(x).$$

— *Donc par la Proposition* 4.11 *du cours on obtient par intégration en* 0

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x).\end{aligned}$$

2. — *On commence par remarquer que*

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 *de de* $\arcsin(x)$ *il nous faut intégrer un DL à l'ordre* 3 *de* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

— *Ensuite on remarque que le DL de* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ *peut être obtenu du DL usuel de* $(1+x)^\alpha$ *avec* $\alpha = -\frac{1}{2}$, ***qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement****, par un changement de variable* $x \to -x^2$. *On écrit*

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + x^3\epsilon(x), \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + x^3\epsilon(x), \text{ pour } \alpha = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + x^6\epsilon(x),$$

On ne cherche qu'un DL à l'ordre 3, donc on tronc et on trouve

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x).$$

Remarque. *On aurait pu voir qu'on avait besoin que d'un DL à l'ordre* 2 *de* $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ *pour avoir un DL à* 4 *de* $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ *par la Théorème de composition des DL comme à l'exercice* 2.

— *Donc par la Proposition* 4.11 *du cours on obtient par intégration en* 0

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \arcsin(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + x^4\epsilon(x)\\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + x^4\epsilon(x).\end{aligned}$$

Remarque. *Remarquant que l'imparité de* arcsin *est bien vérifié par notre DL car on a que des monômes d'ordre impair présent dans le DL.*

3. — *On commence par remarquer que*

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 *de de* $\arctan(x)$ *il nous faut intégrer un DL à l'ordre* 3 *de* $\frac{1}{1+x^2}$.

— *Ensuite on remarque que le DL de* $\frac{1}{1+x^2}$ *peut être obtenu du DL obtenu en* 1 *de* $\frac{1}{1+x}$ *par un changement de variable* $x \to x^2$. *De plus par le théorème de composition des DL il suffit d'un DL à l'ordre* 2 *de* $\frac{1}{1+x}$ *pour obtenir un DL à l'ordre* 3 *de* $\frac{1}{1+x^2}$.
On écrit

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\epsilon(x).$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\epsilon(x).$$

— *Donc par la Proposition* 4.11 *du cours on obtient par intégration en* 0

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + x^4\epsilon(x)\\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + x^4\epsilon(x).\end{aligned}$$

Remarque. *Remarquant que l'imparité de* arctan *est bien vérifié par notre DL car on a que des monômes d'ordre impair présent dans le DL.*

4. — *Encore une fois on commence par*

$$\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)' = e^{x^2},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 *de de* $\int_0^x e^{t^2}dt$ *il nous faut intégrer un DL à l'ordre* 3 *de* e^{x^2}.
une petite coquille dans l'énoncé sur la feuille $\int_0^x e^{x^2}dt$, *c'est* e^{t^2}.

— *Ensuite on remarque que le DL de* e^{x^2} *peut être obtenu du DL usuel de* e^x, ***qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement****, par un changement de variable* $x \to -x^2$. *De plus par le théorème de composition des DL il suffit d'un DL à l'ordre* 2 *de* e^x *pour obtenir un DL à l'ordre* 3 *de* e^{x^2}.
On écrit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x).$$

ce qui donne

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^3\epsilon(x).$$

— *Donc par la Proposition* 4.11 *du cours on obtient par intégration en* 0

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{t^2}dt &= \int_0^0 e^{t^2}dt + x + \frac{1}{3}x^3 + x^4\epsilon(x)\\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + x^4\epsilon(x).\end{aligned}$$

Remarque. *Remarquant que l'imparité de* $\int_0^x e^{t^2}dt$ *est bien vérifié par notre DL car on a que des monômes d'ordre impair présent dans le DL.*

Exercice 4 (A faire entre vous)**.** *1. D'après l'exercice* 3.1

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x),$$

de plus $\sin(x)$ *est un DL usuel qui d'après le cours est*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x).$$

Donc par le Théorème de produit de DL on obtient

$$\ln(1+x)\sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{3} + x^5\epsilon(x).$$

2. D'après le DL usuel,

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x &+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3\\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{120}x^5 + x^5\epsilon(x),\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + x^5\epsilon(x),\\ \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 + x^5\epsilon(x),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = 1 - x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{128}x^5 + x^5\epsilon(x).$$

3. On remarque que

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2},$$

et on écrit le DL usuel de sin,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x).$$

4. On commence par écrire

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^5\epsilon(x),$$

donc,

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^5\epsilon(x)).$$

On pose

$$u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^5\epsilon(x) \rightarrow_{x\to 0} 0.$$

$$\ln(\frac{\sin(x)}{x}) = \ln(1-u) = u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + u^3\epsilon(u).$$

Remarquant que,

$$\epsilon(u) = \tilde{\epsilon}(x)$$

et que,

$$u^3 = x^5\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \frac{x^2}{6} - \frac{7x^4}{360} + x^5\epsilon(x).$$

5.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x).$$

On a également

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + x^5\epsilon(x),$$

Ce qui donne

$$\ln(1-x)e^{x^2} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} - \frac{31x^5}{30} + x^5\epsilon(x).$$

6. On écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$$

et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x),$$

ce qui donne

$$\ln(\cos x) = -2x^2 + \frac{x^4}{24} + x^g\epsilon(x).$$

7.

$$\begin{aligned}\exp(\frac{1}{1-x}) &= \exp(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^5\epsilon(x))\\ &= e\times e^{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^5\epsilon(x)}\\ &= e+ex+\frac{3e}{2}x^2+\frac{13e}{6}x^3+\frac{73e}{24}x^4+\frac{501e}{120}x^5+x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2) &= \ln(1+u),\ \textit{avec } u=x^2,\\ &= 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+u^3\epsilon(u)\\ &= 1-x^2+\frac{x^4}{4}+x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

9.

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+x^5\epsilon(x),$$

Donc par intégration

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt = x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{600}+x^5\epsilon(x).$$

0.2 Application aux calculs de limites, calculs de tangentes et positions relatives en 0

Exercice 5. *Indication : On utilise la Proposition 4.5 du polycopié et on cherche un développement limité à l'ordre* 0 *en* 0 *des fonctions considérées. Attention, il faudra parfois utiliser des développements limités d'ordre supérieur des fonctions usuelles pour l'obtenir !*

1. *On écrit le DL de la fonction* sin *à l'ordre* 3 *:*

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x)\to 0$ *lorsque* $x\to 0$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-x}{x^3} &= \frac{x-\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)-x}{x^3}\\ &= \frac{-\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)}{x^3}\\ &= -\frac{1}{6}+\epsilon(x),\end{aligned}$$

qui est bien un développement limité à l'ordre 0 *en* 0 *de la fonction* $x\mapsto\frac{\sin(x)-x}{x^3}$. *On en déduit que la limite existe et est égale à*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

2. *Calculons le DL du numérateur en 0 à l'ordre 2 :*

$$\begin{aligned}1+\ln(1+x)-e^x &= 1+\left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= -x^2(1+\varepsilon_1(x)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en écrivant également le DL de cos en 0 à l'ordre 2

$$\frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)} = \frac{2}{x^2}\frac{1}{1+\varepsilon_2(x)}.$$

Et finalement

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{-x^2(1+\varepsilon_1(x))}{x^2(1+\varepsilon_2(x))} = -2\lim_{x\to 0}\frac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} = -2.$$

3. *Le DL à l'ordre* 2 *du dénominateur s'obtient par soustraction des DL à l'ordre* 2 *des deux termes (par abus de notation on ne distingue plus les différents* ϵ *par des indices) :*

$$\begin{aligned}\ln(1+x)-\ln(1-x) &= \left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)\\ &= 2x+x^2\epsilon(x),\end{aligned}$$

avec $\epsilon(x)\to 0$ *lorsque* $x\to 0$*. Alors*

$$\begin{aligned}\frac{2x}{\ln(1+x)-\ln(1-x)} &= \frac{2x}{2x+x^2\epsilon(x)}\\ &= \frac{1}{1+x\epsilon(x)},\end{aligned}$$

avec le numérateur et le dénominateur qui tendent vers 1 *quand* x *tend vers* 0*. La fonction admet donc une limite quand* x *tend vers* 0 *et*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(1+x)-\ln(1-x)} = 1.$$

4. *On a besoin du DL à l'ordre* 2 *de* sin *pour déterminer si la fonction admet une limite. Comme* $\sin(x) = x+x^2\epsilon(x)$ *avec* $\epsilon(x)\to 0$ *lorsque* $x\to 0$*, on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x+x^2\epsilon(x)}\\ &= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x\epsilon(x)}.\end{aligned}$$

Le second facteur est l'inverse d'un DL à l'ordre 1*. On utilise alors la propriété de composition des DL pour déterminer un DL de* $\frac{1}{1+x\epsilon(x)}$ *(à nouveau par abus de notations on ne distingue pas les différentes fonctions* ϵ*) :*

$$\frac{1}{1+x\epsilon(x)} = 1+x\epsilon(x)$$

(on compose bien le DL à l'ordre 1 *de la fonction inverse* $x\mapsto\frac{1}{x}$ *avec le DL à l'ordre* 1 *qui se trouve au dénominateur). Mais alors*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x} &= \frac{1}{x}\left(1+x\epsilon(x)\right)-\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x}+\epsilon(x)-\frac{1}{x}\\ &= \epsilon(x),\end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 *quand* x *tend vers* 0*. La fonction admet donc une limite quand* x *tend vers* 0 *et*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

5. *On utilise les DL à l'ordre* 2 *des différentes fonctions usuelles qui apparaissent pour écrire :*

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + x\epsilon(x)}$$

L'inverse d'un DL à l'ordre 1 *apparaît au dénominateur du second facteur, donc par composition des DL :*

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} + x\epsilon(x)\right)} = 1 + \frac{x}{2} + x\epsilon(x)$$

On obtient alors

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + x\epsilon(x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \epsilon(x).$$

Pour le second terme on procède de même :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) - 1} = \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + x\epsilon(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2} + x\epsilon(x)\right)} \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + x\epsilon(x)\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \epsilon(x)\end{aligned}$$

Et finalement pour la différence, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \epsilon(x)\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \epsilon(x)\right) \\ &= 1 + \epsilon(x),\end{aligned}$$

avec $\epsilon(x) \to 0$ *lorsque* $x \to 0$*. Ainsi, la fonction admet une limite quand* x *tend vers* 0 *et*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = 1.$$

Exercice 6 (A faire entre vous)**.** 1. *On utilise le DL à l'ordre* 3 *pour* $\sin = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ *et on cherche par composition le DL à l'ordre* 2 *pour* $x \mapsto \ln(1-x^2)$*. Comme* $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$*, et* $(x^2)^2 = x^2\epsilon(x)$*, on a*

$$\ln(1-x^2) = -x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Alors

$$\frac{\sin(x) - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)}{x \cdot (-x^2 + x^2\epsilon(x))} = \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)}{-x^3 + x^3\epsilon(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + \epsilon(x)}{-1 + \epsilon(x)}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{1}{6}.$$

2. *Les DL usuels à l'ordre* 2 *donnent*

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) - x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right)}{x^2} = \frac{x^2 + x^2\epsilon(x)}{x^2} = 1 + \epsilon(x)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} = 1.$$

3. *Les DL usuels à l'ordre* 2 *(avec composition de DL) donnent*

$$\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{2\ln(1+x)-2x-x^2}=\frac{2x+x^2\epsilon(x)-\big(x+x^2\epsilon(x)\big)}{2\left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)-2x-x^2}=\frac{x^2\epsilon(x)}{-2x^2\epsilon(x)}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{2\ln(1+x)-2x-x^2}=0.$$

4. *La composition de DL à l'ordre* 1 *a permis d'obtenir à l'exercice précédent*

$$\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\epsilon(x).$$

Donc

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}+\epsilon(x).$$

Et

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}.$$

5. *On utilise le développement limité à l'ordre* 4 *de* sin *et la composition (ou le produit)*

$$(\sin(x))^2=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4\epsilon(x)\right)^2=x^2-2\frac{x^4}{6}+x^4\epsilon(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+x^4\epsilon(x)$$

Donc pour l'inverse

$$\frac{1}{(\sin(x))^2}=\frac{1}{x^2}\frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{3}+x^2\epsilon(x)\right)}=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+x^2\epsilon(x)\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\epsilon(x)$$

Ainsi

$$\frac{1}{(\sin(x))^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}+\epsilon(x)$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin(x))^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

Exercice 7. *En effectuant un développement limité en* 0*, à un ordre à déterminer, calculer l'équation de la tangente en* 0 *du graphe de chacune des fonctions suivantes et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente :*

$$f_1(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x^2}.$$

Solution pour f_1. *On effectue un DL d'ordre* 2 *en* 0 *:*

$$(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+u^2\varepsilon(u).$$

Pour $\alpha=1/2$ *on a*

$$\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+u^2\varepsilon(u).$$

Maintenant on remplace $u=2x$ *pour obtenir :*

$$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x).$$

Remarque : ici on utilise la même notation ε pour une fonction qui tend vers 0 lorsque la variable tend vers 0.

On remplace $u = x^2$ pour obtenir :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

On obtient ainsi le DL de f_1 en 0 :

$$f_1(x) = x - x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente en 0 de f_1 est : $y = x$. Pour déterminer la position relative du graphe de f_1 et la droite $y = x$ on regarde la différence :

$$f_1(x) - x = -x^2 + x^2\varepsilon(x) = x^2(-1+\varepsilon(x)).$$

Comme $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on déduit que pour x suffisamment petit, $\varepsilon(x) < 1/2$, donc $f_1(x) \le x$. On conclut que le graphe de f_1 est en dessous de la tangente en 0.

Solution pour f_2**.** *La fonction f_2 est définie par*

$$f_2(x) = \arccos x + \cos x.$$

Il faut d'abord effectuer un DL de $\arccos x$ autour de 0. On dérive

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^\alpha$$

avec $\alpha = -1/2$. On rappelle le DL en 0 de $(1+u)^\alpha$:

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u).$$

On remplace $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$ pour obtenir

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Comme $\arccos 0 = \pi/2$ (on se rappelle ici la définition de la fonction $x \mapsto \arccos x$), on obtient le DL de $\arccos x$ en 0 :

$$\arccos x = \pi/2 - x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x).$$

On se rappelle du Dl de $\cos$ en 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x),$$

donc

$$f_2(x) = 1 + \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$. Elle est au dessus du graphe de f_2 dans un voisinage de 0.

Solution pour f_3**.** *On effectue un DL de f_3 en 0 :*

$$f_3(x) = e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

L'équation de la tangente en 0 est : $y = 1 + 2x$. Elle est en dessous du graphe de f_3 dans un voisinage de 0.

Solution pour f_4. *D'après l'exercice 3 le DL de f_4 en 0 est :*

$$f_4(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

L'équation de sa tangente en 0 est : $y = x$. Ainsi, 0 est un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, f_4 est en dessous du graphe de sa tangente et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit) elle est au dessus. Une remarque que j'ai envoyée à mes étudiants (vous pourrez la dé-commenter)

Remarque (Méthode générale détaillée)**.** *Vous souhaitez avoir la position du DL de votre fonction f au voisinage du point 0. La stratégie est d'écrire le DL de f(x) en 0 au plus petit ordre n (supérieur ou égal à 2) pour lequel le coefficient a_n devant x^n est non nul :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Notez que l'équation de la tangente en 0

$$y = a_0 + a_1 x$$

est donnée par le polynôme tronqué de degré 1 de votre DL. (Pas besoin de tout re-calculer !). Enfin, la courbe f est au dessus (resp. au dessous) de sa tangente en 0 si le signe de la fonction $f(x) - (a_0 + a_1 x) = x^n(a_n + \varepsilon(x))$ est positif (resp. négatif). A noter que puisque ε tend vers 0 en 0, si vous écrivez ce que ça veut dire avec les quantificateurs : dans un petit voisinage de 0 le signe de $a_n + \varepsilon(x)$ sera le même que celui de a_n :

$$\exists \alpha > 0\ \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad |\varepsilon(x)| \leq |a_n| \quad \Rightarrow \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad |a_n + \varepsilon(x)| \geq |a_n| - |\varepsilon(x)| \geq 0.$$

Et après, bien sûr le signe de x^n dépend de la parité de n. Si n est pair, $x^n \geq 0$. Si n est impair, x^n a le même signe que x.

Exercice 8 (A faire entre vous)**.**

0.3 Calculs et applications des développements limités en un point autre que 0

Exercice 9. *Indication : On pourra poser $x = 1 + h$, et remarquer que x tend vers 1 si, et seulement si, h tend vers 0.*

1. *Effectuons tout d'abord un DL de $\sqrt{3+x}$ pour x au voisinage de 1. On pose alors $x = 1+h$ avec $h \to 0$ (lorsque $x \to 1$). On a donc,*

$$\sqrt{3+x} = \sqrt{4+h} = \sqrt{4(1+\frac{h}{4})} = \sqrt{4}\sqrt{1+\frac{h}{4}}.$$

Évidemment $\frac{h}{4} \underset{h\to 0}{\to} 0$, donc

$$\sqrt{3+x} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{4} + h\varepsilon(h)\right),$$

avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. On en déduit alors un DL de f, au voisinage de 1 (à l'ordre 1),

$$f(x) = f(1+h) = \frac{2 - 2 - \frac{h}{4} + h\varepsilon(h)}{h} = \frac{-\frac{h}{4} + h\varepsilon(h)}{h} = -\frac{1}{4} + \varepsilon(h)$$

Remarquez que j'ai noté $\varepsilon(h)$ au lieu de $2\varepsilon(h)$, mais c'est un abus de notation inoffensif puisque 2ε tend toujours vers 0 lorsque h tend vers 0. (Pour être totalement correct, j'aurai du introduire $\varepsilon_2(h) = 2\varepsilon(h)$).

On en déduit donc que lorsque $x \to 1$, i.e. $h \to 0$,

$$f(x) = f(1+h) = -\frac{1}{4} + \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}.$$

Autrement dit f est prolongeable par continuité en 1, en posant la valeur $f(1) = -\frac{1}{4}$.

2. *Dans la question précédente on a utilisé un DL à l'ordre 1 de racine, ici on donne un DL jusqu'à l'ordre 3, $\frac{h}{4} \underset{h\to 0}{\to} 0$, donc*

$$\sqrt{3+x} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{4} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{16} + \frac{1}{16}\frac{h^3}{64} + h^3\varepsilon(h)\right),$$

avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$. On en déduit alors un DL de f, au voisinage de 1,

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &= \frac{2 - 2 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{1}{16}\frac{h^3}{64} + h^3\varepsilon(h)}{h} = \frac{-\frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{h^3}{512} + h^3\varepsilon(h)}{h} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{h}{64} - \frac{h^2}{512} + h^2\varepsilon(h) \end{aligned}$$

On peut alors effectuer le taux d'accroissement de f en 1 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(1+h) + \frac{1}{4}}{h} = \frac{1}{64} - \frac{h}{512} + h^2\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{64}.$$

En particulier le taux d'accroissement converge quand $h \to 0$, donc f est dérivable en 1, et de dérivée $\frac{1}{64}$. La tangente est alors donnée par l'équation

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x-1).$$

Remarquez que pour ça, on aurait pu se contenter d'un DL à l'ordre 2. Le terme (supplémentaire) à l'ordre 3 nous permet donc de comparer la position de la courbe de f par rapport à sa tangente (en $x = 1$).

3. *Au voisinage de $x = 1$ (i.e. $h = 0$) la différence entre f et sa tangente est alors donnée par*

$$-\frac{h^2}{512} + h^2\varepsilon(h),$$

qui est négatif (puisque $h^2 > 0$ et domine $h^2\varepsilon(h)$ au voisinage de 0). Autrement dit, la courbe de f est sous sa tangente, localement au voisinage de 1.

Exercice 10. *Indication : Cherchez des DL à l'ordre 1 (pour l'équation de la tangente) et 2 (pour la position relative). Posez $x = 1 + h$, avec $h \to 0$.*

1. *On effectue directement un DL à l'ordre 2 de f, en utilisant celui de $\sqrt{x} = \sqrt{1+h}$ et $\sqrt{3+x} = \sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$:*

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + h + 2\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon_1(h)\right) - 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128} + h^2\varepsilon_2(h)\right) \\ = 1 + \frac{7}{4}h - \frac{15}{64}h^2 + h^2\varepsilon(h), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon = 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon$, donc tend aussi vers 0 quand $h \to 0$. La tangente de f au voisinage de 1 est donnée par la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{7}{4}(x-1).$$

La différence entre f et sa tangente au voisinage de 1 est donnée par

$$-\frac{15}{64}h^2 + h^2\varepsilon(h),$$

qui est négatif pour h au voisinage de 0, autrement dit, le graph de f est sous sa tangente au voisinage de 1.

2. *On utilise $\sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{1+h}$ et $\sqrt{2+x} = \sqrt{3+h} = \sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h}{3}}$. On en déduit que*

$$g(1+h) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\varepsilon(h) - (1 + \frac{h}{6} - \frac{h^2}{72} + h^2\varepsilon(h))\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}h - \frac{\sqrt{3}}{9}h^2 + h^2\varepsilon(h).$$

Remarque. *Remarquez l'abus de notation comme dans l'exercice précédent : il y a 3 fonction ε différentes, une pour le DL de $\sqrt{3x}$, une pour celui de $\sqrt{2+x}$, et la dernière en faisant la somme. Pour être totalement correct on devrait les noter ε_1, ε_2 et $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, qui tend lui aussi toujours vers 0. Mais c'est tout l'interet des DL, on "oublie" les termes d'ordre supérieur en les rentrant dans un ε, et tout combinaison de tels termes (ainsi que les produits) sont encore de la forme ε.*

On en déduit que la tangeante en 1 de g est donnée par la droite d'équation

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(h-1).$$

Et la différence entre g et sa tangeante est donnée par

$$-\frac{\sqrt{3}}{9}h^2 + h^2\varepsilon(h),$$

qui est négatif au voisinage de $h = 0$, on en déduit que le graph de g est sous sa tangeante en $x = 1$.

Exercice 11 (A faire entre vous)**.**

0.4 Recherche d'asymptotes et positions relatives.

Exercice 12. *1) Étudions la fonction $f_1(x) = x\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ en $+\infty$. On écrit que :*

$$x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x\sqrt{\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x}} = x\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \to +\infty$, $u \to 0$ nous déduisons que

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}} = (1+2u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2u) - \frac{1}{8}(2u)^2 + u^2\epsilon(u)$$

avec $\lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$ et où par abus de notation nous avons écrit $u^2\epsilon(u)$ au lieu de $(2u)^2\epsilon(2u)$. Donc

$$x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right)$$

Ainsi pour x au voisinage de $+\infty$ on obtient :

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$$

. Donc le graphe de f_1 possède une asymptote d'équation $y = x + 1$ et le graphe est au dessous de l'asymptote car $-\frac{1}{2} < 0$.

Étudions la fonction $f_1(x) = x\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ en $-\infty$. Les étapes sont identiques au cas $+\infty$ et nous obtenons ainsi la même expression pour x au voisinage de $-\infty$:

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$$

. Donc le graphe de f_1 possède aussi une asymptote d'équation $y = x + 1$ en $-\infty$ mais cette fois-ci le graphe est au dessus de l'asymptote car $-\frac{1}{2x}$ est maintenant positif.

***2)** Étudions la fonction $f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. On écrit que :*

$$\sqrt{x(1+2x)} = |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = (\sqrt{2}x)\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \to +\infty$, $u \to 0$ nous déduisons que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + u^2\epsilon(u)$$

et

$$e^{1/x} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$$

avec $\lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$ (par abus de notation nous n'avons pas différencié les différentes fonctions epsilons).
Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}} &= (\sqrt{2}x)\left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right) \\ &= (\sqrt{2}x)\left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right)\end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de $+\infty$ on obtient :

$$f_2(x) = (-\sqrt{2}x)\left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right)$$

Donc le graphe de f_2 possède une asymptote d'équation $y = \sqrt{2}x + \frac{5}{2\sqrt{2}}$ en $+\infty$ et le graphe est au dessus de l'asymptote car $\frac{23}{16\sqrt{2}} > 0$.
Étudions maintenant $f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}}$ en $-\infty$. Cette fois nous avons :

$$\sqrt{x(1+2x)} = -x\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = -(\sqrt{2}x)\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$$

Ainsi on obtient au voisinage de $-\infty$ on obtient :

$$f_2(x) = -(\sqrt{2}x)\left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})\right)$$

Le graphe possède aussi l'asymptote $y = -\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}$ en $-\infty$ et le graphe est au dessus de l'asymptote car $-\frac{23}{16\sqrt{2}}x > 0$ pour $x < 0$.

3) Étudions la fonction $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ *en* $+\infty$. *On écrit que :*

$$\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x} = 1+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1+\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ *et remarquant que lorsque* $x \to +\infty$, $u \to 0$ *nous déduisons que*

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{1+u^2} &= 1+1+\frac{1}{2}(u^2)+u^2\epsilon(u^2) \\ &= 2+\frac{1}{2}u^2+u^2\epsilon(u^2) \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons aussi

$$\ln(2+v) = \ln(2+0)+\frac{1}{(2+0)}v+v\epsilon(v)$$

Nous cherchons le développement limité d'une composition de fonctions donc il faut remplacer dans l'équation du dessus v *par* $\frac{1}{2}u^2+u^2\epsilon(u^2)$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) &= \ln(2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^2+u^2\epsilon(u^2)\right)+u^2\epsilon(u^2) \\ &= \ln(2)+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

Nous avons donc une asymptote verticale $y = \ln(2)$ *car* $\lim_{+\infty} f_3 = \ln(2)$. *Le graphe se situe au dessus de l'asymptote car* $\frac{1}{4x^2} > 0$.

Exercice 13 (A faire entre vous)**.**

0.5 Pour aller plus loin : ces exercices sont facultatifs et ne sont à faire que si les précédents sont bien compris

Exercice 14. Indication : développer la fonction en 0 de deux manières, une des manières utilisant la formule de Taylor-Young.
On rappelle le développement limité à l'ordre n *en* 0 *de la fonction* $u \mapsto \frac{1}{1+u}$: $\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\cdots+u^n+u^n\epsilon(u) = \sum_{k=0}^{n} u^k+u^n\epsilon(u)$ *où, comme d'habitude,* $\epsilon(u)$ *tend vers* 0 *quand* u *tend vers* 0. *On obtient donc (en faisant* $u = -x^4$*) le développement limité en* 0 *de* f *à l'ordre* $4n+2$ *:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,\big(\sum_{k=0}^{n}(-x^4)^k+x^{4n}\epsilon(x)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{4k+2}+x^{4n+2}\epsilon(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme la fonction f *est de classe* C^∞, *on peut utiliser la formule de Taylor-Young à tous ordres. Pour l'ordre* $4n+2$, *on a* $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{4n+2}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j+x^{4n+2}\epsilon(x)$.

Par unicité du développement limité, on a donc : si j *s'écrit sous la forme* $j = 4k+2$, $(-1)^k = \frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!}$ *c'est-à-dire* $f^{(4k+2)}(0) = (-1)^k\,(4k+2)!$ *et si* j *ne s'écrit pas sous la forme* $4k+2$, $0 = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ *c'est-à-dire* $f^{(j)}(0) = 0$.

Exercice 15. *1. L'énoncé est imprécis. On demande de montrer que* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ *pour tous les* $x > 0$.

Pour démontrer cela, on définit la fonction $g : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$. *Elle est clairement dérivable et on calcule* $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. *Comme la dérivée de* g *est nulle sur l'intervalle* $]0, +\infty[$, *la fonction est constante sur* $]0, +\infty[$ *et vaut (par exemple)* $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

2. *La formule de Taylor-Young dit que* $(*)$: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x)$ *où* $\epsilon(x)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 0. *En effet,* arctan *est de classe* C^∞ *et on calcule les dérivées de* arctan *jusqu'à l'ordre* 3 *en* 0. *On a successivement* $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arctan)''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $(\arctan)^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, *ce qui donne* $(\arctan)'(0) = 1$, $(\arctan)''(0) = 0$ *et* $(\arctan)^{(3)}(0) = -2$. *Comme la fonction* arctan *est impaire, on sait que ses dérivées d'ordre pair s'annulent en* 0 *donc* $\arctan^{(4)}(0) = 0$ *(cette remarque permet d'éviter le calcul de la dérivée 4ième. D'où la formule* $(*)$.

   D'après 1), on a : $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ *pour tous les* $x > 0$. *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $1/x$ *tend vers* 0^+. *On peut donc développer* $\arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ *et donc*

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^4}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

   avec $\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$.

3. *On a le développement :*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \\ &= x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^4}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x^2}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

   On a donc $f(x) - x = -\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *avec* $\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$. *Comme le second membre tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$, *on en déduit que la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *de* f *est asymptote à la droite* $\mathcal{D}$ *d'équation* $y = x$.

   On a plus précisément $f(x) - x = \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. *Comme* $\frac{-1}{3} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right))$ *tend vers* $-1/3$ *quand* x *tend vers* $+\infty$, *il en résulte que cette expression est* < 0 *pour* x *assez grand. Par ailleurs, on a* $1/x > 0$. *On a donc* $f(x) - x < 0$ *pour* x *assez grand. Il en résulte que* $\mathcal{C}_f$ *est sous son asymptote* $\mathcal{D}$ *pour les* x *assez grands.*

Exercice 16.