DEVOIR ANALYSE COMPLEXE 1

par

3M266

Exercice 1. — Calculer les rayons de convergence des series entières suivantes :

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$$
2. $$\sum_{n\geq 0}(1+\frac{(-1)^n}{n})^{n^2} z^n.$$

Exercice 2. — 1. **Redémontrer** que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ définie une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^{\times}$.

2. Calculer l'intégrale, où le cercle unité est orienté positivement,
$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z}.$$
3. Soit $a, b > 0$ deux réels. On pose, pour $t \in [0, 2\pi]$,
$$\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t).$$
Géométriquement, que décrit le chemin γ ? Le tracer.
4. Justifier que,
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z}.$$
5. En déduire la valeur de l'intégrale,
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

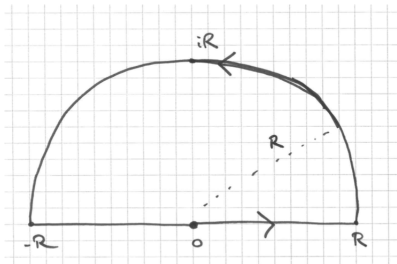
Exercice 3. — Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^m), \forall z \in \mathbb{C}.$$

1. Donner un exemple d'une fonction f vérifiant les hypothèses précédentes.
2. Exprimer les coefficients a_n en fonction des valeurs des dérivées de f.
3. Rappeler le théorème de Cauchy.
4. Montrer que, pour tout $R > 0$,
$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}.$$
Indication : Montrer que $\int_{C(0,R)} \frac{dz}{z^k} = 0$ ***pour tout*** $k \geq 2$.
5. En déduire que f est un polynôme de degré au plus m.

Exercice 4. — On pose $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

1. Trouver le domaine de définition de f. Sur quel ouvert U de $\mathbb{C}$ est-elle holomorphe ? Le justifier.
2. Justifier que l'on peut écrire pour tout $z \in U$,
$$f(z) = \frac{-i}{2e(z-i)} + g(z),$$
où $g(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
Indication : On pourra décomposer $\frac{1}{1+z^2}$ ***en éléments simples.***
3. On note Γ_R le chemin suivant.



Que vaut
$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz?$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx.$$

3M266, Bureau 509, Tour 15-16, 4 Place Jussieu, 75005 Paris • *E-mail :* valentin.hernandez@imj-prg.fr