Université Pierre & Marie Curie — Licence de Mathématiques L3

LM367 – Analyse complexe 1

TD7. Résidus.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. On suppose que la partie réelle de f est positive en tout point. Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$.

Exercice 2. Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ admet des développements en série de Laurent dans les anneaux $A(0;0,1)$, $A(0;1,2)$ et $A(0;2,+\infty)$. Les calculer.

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier les singularités et calculer les résidus.

(a) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.

(b) $g(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z^2}$.

(c) $h(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$.

Exercice 4.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4} = 0$ (*on pourra déformer le cercle vers l'infini*).

(b) Calculer de même $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz$.

Exercice 5.

(a) Etudier les singularités de $z \mapsto \dfrac{1}{z^n(e^z-1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^n(e^z-1)}$ pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$. *Méthode : exprimer* $\sin t$ *en fonction de* e^{it} *afin de faire apparaître l'intégrale d'une fraction rationnelle sur un cercle.*

Exercice 7.

(a) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R = \{z \in D(0,R) \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. On paramètre positivement son bord $\partial\Omega_R$. Calculer $\displaystyle\int_{\partial\Omega_R} \frac{e^{iz}dz}{1+z^2}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

Exercice 8.

(a) Montrer que $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z}$ définit une fonction entière.

(b) On paramètre la moitié inférieure du cercle unité par $\sigma(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq 0$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}dx = \int_\sigma \frac{\sin z}{z}dz.$$

(c) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R^+ = \{z \in D(0,R) \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \cup D(0,1)$. On paramètre positivement son bord $\partial\Omega_R^+$. Calculer $\displaystyle\int_{\partial\Omega_R^+} \frac{e^{iz}dz}{z}$.

(d) Pour $R > 1$, on pose $\Omega_R^- = D(0,R)\backslash\overline{\Omega_R^+}$. On paramètre négativement son bord $\partial\Omega_R^-$. Calculer $\displaystyle\int_{\partial\Omega_R^-} \frac{e^{-iz}dz}{z}$.

(e) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $e^z = 3z^n$ admet exactement n solutions dans $D(0,1)$.

Exercice 10. On rappelle que la fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Si $\mathrm{R}e(z) > 0$, on dispose d'une formule :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Le prolongement analytique à $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ repose sur l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(a) Montrer que Γ admet un pôle simple en chaque entier négatif et calculer le résidu correspondant.

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\Gamma(1/k)\Gamma(1-1/k) = k\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^k}.$$

(c) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^k} = \frac{\pi}{k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}.$$

Indication : on pourra utiliser le chemin bordant $\Omega_R = \{z \in D(0,R) \,/\, 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/k\}$.

(d) En déduire la formule des compléments :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$