

### TD6. Homotopies. Biholomorphismes.

**Exercice 1.** On se propose de donner une preuve topologique du théorème de D'Alembert-Gauss. Supposons donc qu'il existe un polynôme complexe  $P$  de degré  $n \geq 1$  et ne s'annulant pas. Quitte à diviser  $P$  par une constante, on suppose même que le coefficient dominant de  $P$  est 1.

- (a) Pour  $R > 0$ , on paramètre le cercle de centre  $R$  par  $\gamma_R(t) = R e^{2i\pi t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Montrer que le lacet  $P \circ \gamma_R$  est homotope au lacet constant à  $P(0)$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (b) Montrer que, pour  $R$  assez grand,  $P \circ \gamma_R$  est homotope au lacet  $\gamma_R^n$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (c) En déduire deux calculs contradictoires de l'indice de  $P \circ \gamma_R$  par rapport à 0.

**Exercice 2.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  un lacet.

- (a) Montrer que  $\gamma$  est homotope à  $\sigma = \gamma/|\gamma|$  dans  $\mathbb{C}^*$ .
- (b) Montrer qu'il existe une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  de  $[0, 1]$  telle que pour  $0 \leq k \leq N - 1$ , on a  $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset D(\sigma(t_k), 1)$ .
- (c) Montrer que, pour  $0 \leq k \leq N - 1$ , il existe des fonctions continues  $\theta_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que
  - $\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \sigma(t) = e^{i\theta_k(t)}$ ,
  - $\theta_{k+1}(t_{k+1}) = \theta_k(t_{k+1})$ .
- (d) En déduire qu'il existe un entier  $n$  et une fonction continue  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\sigma(t) = e^{i\theta(t)}$  et  $\theta(1) = \theta(0) + 2n\pi$ .
- (e) Soit  $\gamma_n(t) = e^{2i\pi n t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , un paramétrage du cercle parcouru  $n$  fois. Déduire de ce qui précède que  $\gamma$  est homotope à  $\gamma_n$  dans  $\mathbb{C}^*$ .
- (f) Montrer que deux lacets de  $\mathbb{C}^*$  sont homotopes si et seulement si ils ont même indice par rapport à 0.

**Exercice 3.**

- (a) Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $D(0, 1)$  telle que  $f(0) = 0$  et  $|f(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in D(0, 1)$ .
  - (i) Montrer que  $g : z \mapsto f(z)/z$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $D(0, 1)$ .
  - (ii) Montrer que, pour tout  $z \in D(0, 1)$ ,  $|f(z)| \leq |z|$ .
  - (iii) Montrer que  $|f'(0)| \leq 1$ .
  - (iv) Montrer que si  $|f'(0)| = 1$ , il existe un nombre  $\lambda$  de module 1 tel que, pour tout  $z \in D(0, 1)$ ,  $f(z) = \lambda z$ .
- (b) Montrer que les fonctions  $\phi_a : z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ ,  $|a| < 1$ , sont des biholomorphismes de  $D(0, 1)$ , de réciproque  $\phi_{-a}$ .
- (c) En déduire que tout biholomorphisme du disque unité est de la forme  $\lambda\phi_a$ , où  $\lambda$  est une constante de module 1 et  $|a| < 1$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un biholomorphisme tel que  $f(0) = 0$ .

- (a) Montrer que  $g : z \mapsto f(1/z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , avec un pôle en 0 (*on montrera que les autres types de singularités contredisent les hypothèses*).
- (b) En déduire qu'il existe une constante  $c$  et un entier naturel  $m$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|f(z)| \leq c(1 + |z|)^m$ .
- (c) Montrer que  $f$  est un polynôme.
- (d) Quels sont les polynômes complexes bijectifs ?
- (e) En déduire que les biholomorphismes de  $\mathbb{C}$  sont de la forme  $z \mapsto \alpha z + \beta$ , avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 5.** Soit  $f$  une fonction holomorphe injective sur un ouvert contenant le disque unité fermé de  $\mathbb{C}$ .

- (a) Calculer le déterminant jacobien de  $f$  (vue comme fonction  $\mathbb{R}$ -différentiable sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) en fonction de  $f'$ .
- (b) Montrer que l'aire de  $f(D(0, 1))$  est au moins  $\pi|f'(0)|^2$  et caractériser l'égalité.