TD5. Suites de fonctions holomorphes, intégrales à paramètre.

Exercice 1.

(a) Soit Log la détermination principale du logarithme. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur le disque $D(0,1)$ telle que
$$\forall\, z \in D(0,1), \quad \mathrm{Log}(1+z) = z + z^2 g(z).$$

(b) En déduire que la suite de fonctions f_n définie par
$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers l'exponentielle.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D(0,1)$ telle que $f(0) = 0$.

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(z^n)$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$ vers une fonction holomorphe g.

(b) Calculer le développement en série entière de g, en 0, en fonction de celui de f.

Exercice 3. Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à sa transformée de Fourier $\hat{f}$, définie pour $z \in \mathbb{C}$, par
$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixz} dx.$$
Montrer que $\hat{f}$ est une fonction entière.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'espace de Hardy
$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \;/\; \int_\Omega |f|^2 < +\infty \right\},$$
muni de la norme L^2 : $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Soit K un compact dans Ω. Montrer qu'il existe une constante c_K telle que
$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \sup_K |f| \leq c_K \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(b) Montrer que $(\mathcal{H}(\Omega), \|.\|_{L^2(\Omega)})$ est complet.

Exercice 5. On s'intéresse à la fonction zeta de Riemann :
$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}.$$

(a) Montrer que ζ est bien définie et holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>1\}$.

(b) Notons $E(t)$ la partie entière d'un réel t. Montrer que l'intégrale à paramètre
$$G(z)=\int_1^{+\infty}\frac{t-E(t)}{t^{z+1}}dt$$
définit une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>0\}$.

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Re}(z)>0$, on pose $I_n(z)=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^z}$. Montrer que
$$\int_n^{n+1}\frac{t-E(t)}{t^{z+1}}dt=I_n(z)-nI_n(z+1).$$

(d) Montrer que si $\mathrm{Re}(z)>1$, on a
$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+1-zG(z).$$

(e) En déduire que ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}\,/\,\mathrm{Re}(z)>0\}$.

Exercice 6. On s'intéresse à la fonction Gamma d'Euler :
$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt.$$

(a) Montrer que Γ est bien définie et holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>0\}$.

(b) Montrer que si $\mathrm{Re}(z)>0$, $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. En déduire que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Re}(z)>-1 \text{ et } z\neq 0\}$.

(c) En déduire par récurrence que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$.

Exercice 7. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $\overline{f(\Omega)}$ est un compact inclus dans Ω. On veut montrer que la suite des itérées de f converge vers une fonction constante.

(a) Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n:=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ fois}}$ est bien définie et holomorphe sur Ω.

(b) Montrer que $L:=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{f_n(\Omega)}$ est compact.

(c) Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n) qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $g\in\mathcal{O}(\Omega)$.

(d) Montrer qu'alors $g(\Omega)=L$.

(e) En déduire que $L=\{a\}$ pour un certain $a\in\mathbb{C}$.

(f) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante à a.