TD4. Formule de Cauchy et conséquences.

Exercice 1. Calculer les intégrales :

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz \qquad \text{et} \qquad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^2 - z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/0 < |z| < 1\}$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

(a) Soit f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \backslash \mathbb{R}$. Montrer que f est holomorphe sur Ω.

(b) On suppose maintenant que Ω est symétrique par rapport à l'axe des réels et on note $\Omega_+ = \{z \in \Omega/\mathrm{I}m(z) > 0\}$. Soit une fonction f continue sur $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$, holomorphe sur Ω_+, réelle sur $\Omega \cap \mathbb{R}$. Montrer que f admet une unique extension holomorphe à Ω.

Exercice 4. On note Log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. On définit une fonction f sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ par

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{1-z} \text{ si } z \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = -1.$$

(a) Montrer que f est holomorphe.

(b) Pour $\epsilon \in]0,1[$, on note $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-1| \leq 1,\, |z| \geq \epsilon\}$. Soit γ_ϵ un paramétrage de ∂D_ϵ, dans le sens direct. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz$.

(c) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\, d\theta$.

Exercice 5. Soit f une fonction entière.

(a) On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$. Montrer que f est constante.

(b) On suppose que la partie réelle de f est bornée. Montrer que f est constante.

(c) On suppose qu'il existe une constante C et un entier positif p telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C(1+|z|)^p$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus p.

Exercice 6.

(a) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$, non constante, continue sur $\overline{D(0,1)}$ et qui est de module constant sur $\partial D(0,1)$. Montrer que f s'annule sur $D(0,1)$.

(b) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$, continue sur $\overline{D(0,1)}$ et dont la partie réelle est constante sur $\partial D(0,1)$. Montrer que f est constante.

Exercice 7. On travaille sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{I}m(z) > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$, continue et bornée sur l'adhérence $\overline{\mathbb{H}}$ de $\mathbb{H}$. On note M le supremum de $|f|$ sur $\partial\mathbb{H}$. On veut montrer que f est bornée par M sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

(a) Montrer que si f tend vers 0 à l'infini, alors f est bornée par M sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

(b) Dans le cas général, considérer la fonction $g : z \mapsto \dfrac{f^n(z)}{i+z}$, $n \in \mathbb{N}$, et montrer que f est toujours bornée par M sur $\mathbb{H}$.

Exercice 8. Une fonction $E : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ est dite unitaire si elle est holomorphe sur $D(0,1)$, continue sur $\overline{D(0,1)}$ et de module 1 sur $\partial D(0,1)$.

(a) Soit E une fonction unitaire non constante. Prouver que E a un nombre fini non nul de zéros et que $|E| < 1$ sur $D(0,1)$.

(b) Prouver que si $a \in D(0,1)$, $E_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est unitaire.

(c) Prouver que les fonctions unitaires sont, à une constante multiplicative près, les produits finis de fonctions de type E_a, $a \in D(0,1)$.