TD3. Logarithme. Intégrales sur des chemins.

On notera ici Log *et* $\sqrt{.}$ *les déterminations principales du logarithme et de la racine carrée.*

Exercice 1. Soient $j = e^{2i\pi/3}$ et $T = \{tj^k / t \in]-\infty, 1], k = 0, 1, 2\}$.
(a) Montrer que la formule $f(z) = \mathrm{Log}(\sqrt{z^3 - 1})$ définit bien une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash T)$.
(b) Calculer $f(i)$.

Exercice 2.
(a) A-t-on $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ tels que $ab \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$?
(b) A-t-on $\mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(z)$ pour tout z dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$?
(c) Etant donné un nombre réel α, on note D_α la demi-droite $\{re^{i(\pi-\alpha)}/r \geq 0\}$ et L_α : $z \mapsto \mathrm{Log}(e^{i\alpha}z) - i\alpha$. Montrer que c'est une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$.
(d) Exprimer les déterminations continues du logarithme sur le disque $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}^*$ sous forme de séries entières (en $z - z_0$).

Exercice 3. Soit $U = \{z \in \mathbb{C}/|\mathrm{Re}(z)| < 1\}$. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions $f \in \mathcal{O}(U)$ telles que, pour tout $z \in U$, $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer, sans calcul, que $\ln|f|$ est une fonction harmonique sur l'ouvert $\Omega' = \{z \in \Omega/f(z) \neq 0\}$.

Exercice 5.
(a) Montrer que la fonction $\tan = \sin/\cos$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash A$, où $A = \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$.
(b) Soient $B = \{it/t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$ et $U = \mathbb{C}\backslash B$. Montrer que la formule

$$\varphi(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

définit un biholomorphisme φ entre U et $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Calculer sa réciproque.
(c) Montrer que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

vérifie $\tan \circ f = id_U$. En déduire que f est une extension holomorphe de la fonction arctangente usuellement définie sur $\mathbb{R}$.
(d) Expliquer le rayon de convergence de la série de Taylor de la fonction arctangente en 0.

Exercice 6. Soit γ le chemin $t \mapsto e^{it}$, où t décrit $[0, \pi/2]$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

Exercice 7. On considère une fonction continue $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$. Montrer que si f est $\mathbb{C}-$dérivable en 0, alors

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{\partial D(0,r)} f(z)dz = 0.$$

Exercice 8. Pour tout réel strictement positif A, on note γ_A le bord (orienté positivement) du triangle défini par les points 0, A, $A(1+i)$.

(a) Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_A} e^{-z^2} dz$.

(b) En faisant tendre A vers $+\infty$, en déduire l'existence et la valeur des intégrales de Fresnel : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière bornée (on va prouver que f est forcément constante : c'est le théorème de Liouville).

(a) On se donne deux nombres complexes distincts a et b et on choisit un réel $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer $\displaystyle I(R) = \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ (*indication : éléments simples*).

(b) En faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que f est constante.