TD2. Fonctions analytiques.

Exercice 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(i+j)^\alpha} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
(a) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$.
(b) En déduire que si $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0,+\infty]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(c_n)^{\frac{1}{n}} = L$.

Exercice 3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq1} a_n z^n$ quand :

- $a_n = \log n$;
- $a_n = \log(1+\sin(1/n))$;
- $a_{2p} = \alpha^{2p}$ et $a_{2p+1} = \beta^{2p+1}$, $0 < \alpha < \beta$;
- $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$;
- $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$.

Exercice 4. Montrer que si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 5.
(a) (Transformation d'Abel) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \displaystyle\sum_{i=m}^{n} v_i$. Montrer que, pour $n > m$, on a

$$\sum_{i=m}^{n} u_i v_i = \sum_{i=m}^{n-1}(u_i - u_{i+1})V_m^i + u_n V_m^n.$$

(b) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge si $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$ *(indication: utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critère de Cauchy).*

Exercice 6. Donner le développement en série entière des fonctions analytiques suivantes au point demandé et donner le rayon de convergence de la série obtenue :

- $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z-3}$ en 0;
- $g(z) = \dfrac{1}{3-2z}$ en 3;
- $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 7. Montrer que l'expression $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$ définit une fonction f vérifiant l'équation $e^{f(z)} = z$ sur le disque $D(1,1)$.

Exercice 8.

(a) Déterminer les parties discrètes de $\mathbb{C}$ dans la liste suivante:
$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad A = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \overline{A}, \quad A \cup \mathbb{N}^*.$$

(b) Déterminer les composantes connexes d'une partie discrète de $\mathbb{C}$.

(c) Montrer qu'un sous-ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ intersecte chaque compact de $\mathbb{C}$ en un nombre fini de points. En déduire qu'un tel sous-ensemble est de cardinal (au plus) dénombrable.

Exercice 9.

(a) Déterminer les fonctions analytiques f sur $D(0,1)$ qui vérifient $f(1/n) = 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit f une fonction analytique sur $D(0,1)$. On suppose qu'il existe une suite de réels distincts a_n dans $[-1/2, 1/2]$ tels que $f(a_n) \in \mathbb{R}$ pour tout n. Montrer que pour tout $z \in D(0,1)$, $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$.

(c) On suppose de plus que (a_n) est décroissante, converge vers 0 et vérifie $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$ pour tout p. Montrer qu'alors f est constante *(on pourra raisonner sur la dérivée de f).*

Exercice 10. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(z)$. On se fixe un réel strictement positif $r < R$.

(a) Montrer que $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq \max_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que s'il y a égalité pour un entier n, alors $f(z) = a_n z^n$ pour tout $|z| < R$.

(c) Montrer que si $|f|$ est maximal en 0, alors f est constante.