TD1. Introduction à l'analyse complexe.

Exercice 1. Soient $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{I}mz > 0\}$ et $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

(a) Montrer que $f(\mathbb{H})$ est inclus dans $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

(b) Montrer que f établit une bijection entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$.

Exercice 2. En quels points de $\mathbb{C}$ les fonctions suivantes sont-elles $\mathbb{C}$-différentiables ?

(a) $a(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

(b) $b(z) = \bar{z}$.

(c) $c(z) = \mathrm{R}e(z)$.

(d) $d(z) = \mathrm{I}m(z)$.

(e) $e(z) = |z|^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie pour $x, y \in \mathbb{R}$ par $f(x+iy) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ tel que f est holomorphe sur Ω ?

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) f est constante.

(b) f' est identiquement nulle.

(c) $\mathrm{R}ef$ est constante.

(d) $\mathrm{I}mf$ est constante.

(e) $\bar{f}$ est holomorphe.

(f) $|f|$ est constante.

L'image d'une fonction holomorphe non constante peut-elle être contenue dans un cercle ? Dans une droite ?

Exercice 5. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall\, z \in \Omega, \quad \mathrm{R}ef(z) = F(\mathrm{I}mf(z)).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 6. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(a) On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z) + \overline{g(z)}$ est réel. Montrer qu'il existe une constante réelle c tel que $f = g + c$.

(b) On suppose maintenant que g ne s'annule pas sur Ω et que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z)\overline{g(z)}$ est réel. Montrer qu'il existe une constante réelle c tel que $f = c\,g$.

Exercice 7. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On pose $\Omega' = \{\bar{z}/z \in \Omega\}$ et, pour $z \in \Omega'$, $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur Ω'.

Exercice 8. Soit $u : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que u est harmonique si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction holomorphe. *On rappelle que u est dite harmonique si son laplacien est nul, i.e. si* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 9. Soient des réels a, b, c. On considère la fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $P(x + iy) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $x, y \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $P = \mathrm{Re} f$. Sous cette condition, donner toutes les fonctions entières f telles que $P = \mathrm{Re} f$.