Théorie des Nombres TD4

M2 AAG 2021-2022

Exercice 1. Soit F un corps de nombres. On pose $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ et $\mathbb{A}_f := \prod'_{v\nmid\infty} F_v$ l'anneau des adèles finis.

1. Soit $\widehat{\mathcal{O}_F} := \prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_v$. Montrer que $\mathbb{A}_f \simeq F \otimes_{\mathcal{O}_F} \widehat{\mathcal{O}_F}$.
2. Montrer que $\mathbb{A}_f = F + U$ pour tout sous-groupe ouvert U de $\mathbb{A}_f$.
3. Soit $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f(x+\zeta) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{A}$ et tout $\zeta \in F$ et $f(x+y) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{A}$ et $y \in F_v$, $v|\infty$. Montrer que f est constante.
4. En déduire que $\mathbb{A}/F$ est connexe. Montrer que
$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \simeq \varprojlim_n \mathbb{R}/n\mathbb{Z}.$$

Exercice 2.

1. Montrer que $I_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}_{>0} \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times)$. En déduire qu'un caractère continu de $I_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^\times$ à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$ s'écrit de façon unique sous la forme
$$\chi(a) = |a_\infty|^s \chi_0(a_f)$$
où $x = \zeta a_\infty a_f$ avec $\zeta \in \mathbb{Q}^\times$, $a_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$ et $a_f \in \prod \mathbb{Z}_p^\times$ avec $s \in \mathbb{C}$, $\chi_0 = \bigotimes_p \chi_{0,p}$ où $\chi_{0,p}$ est trivial pour presque tout p. Montrer de plus que $\chi_{0,p}$ est trivial sur un certain sous-groupe de la forme $1 + p^{\alpha_p}\mathbb{Z}_p$.
2. Montrer que χ_0 s'identifie à un caractère χ_N de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ pour un $N \geqslant 1$ tel que si q est premier à N alors $\chi_N(q^{-1}) = \chi_0(1,\ldots,1,q,1,\ldots)$ (où q figure à la place q).
3. Soit F un corps quadratique imaginaire. Montrer que si le nombre de classes h_F de F vaut 1, alors
$$I_F/F^\times \simeq (\mathbb{C}^\times \times \prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_{F_v}^\times)/\mu_F.$$

   Que se passe-t-il si $h_F > 1$?

Exercice 3. Soit F un corps de nombres, $F \neq \mathbb{Q}$. Soient $v_1, \ldots, v_d$ les places infinies de F. Montrer que pour tout i, via le plongement diagonal,
$$\mathcal{O}_F \subset \prod_{k\neq i} F_{v_k}$$
est un sous-groupe dense.

Exercice 4. Soit L/K une extension finie de corps globaux.

1. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $L \otimes_K \mathbb{A}_K \simeq \mathbb{A}_L$.

On suppose désormais que l'extension L/K est galoisienne. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit sur $\mathbb{A}_L$ en posant

$$\sigma((x_v)_v) := (\sigma(x_{\sigma^{-1}(v)}))_v.$$

2. Montrer que $\mathbb{A}_L^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \mathbb{A}_K$ et que $I_L^{\mathrm{Gal}(L/K)} = I_K$.
3. Soit $c : \mathrm{Gal}(L/K) \to L^\times$ une application vérifiant

$$\forall \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/K), \quad c(\sigma\tau) = c(\sigma)\sigma(c(\tau)).$$

   Montrer qu'il existe $b \in L^\times$ tel que

$$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K), \quad c(\sigma) = b\sigma(b)^{-1}.$$

4. En déduire que $(I_L/L^\times)^{\mathrm{Gal}(L/K)} = I_K/K^\times$.
5. Montrer que $(\mathbb{A}_L/L)^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \mathbb{A}_K/K$.

Exercice 5. 1. Montrer que $\mathbb{Q}^\times$ n'est pas dense dans les idèles finies $\mathbb{A}_f^\times$.

2. Montrer que l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$ est dense.
3. En déduire que si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, alors

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K \simeq \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_f^\times/\det(K).$$