Théorie des Nombres TD1

M2 AAG 2021-2022

Echauffement

1. Soit $|\cdot|_p$ la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$. Quel est l'anneau de valuation associé ? Quel est le corps résiduel ?

2. Montrer que tout corps local archimédien est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Montrer que sur $\mathbb{Q}_p$, une suite $(u_n)_n$ vérifie $u_n \to 0$ si et seulement si $\sum_n u_n$ converge. Dans quelle généralité est-ce vrai ? Trouver un exemple d'une suite de rationnels telle que $\sum u_n$ converge dans $\mathbf{Q}_p$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

4. Soit $\overline{\mathbf{Q}_p}$ une cloture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Montrer qu'il existe une unique extension de $|.|_p$ de $\mathbf{Q}_p$ à $\overline{\mathbf{Q}_p}$. Soit $\overline{\mathbb{Z}_p} = \{x \in \overline{\mathbf{Q}_p} | \ |x| \leqslant 1\}$. Montrer que c'est un anneau de valuation, mais pas un anneau de valuation discrete. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}_p}$ n'est pas compact, en déduire que $\overline{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas localement compact.

5. Soit K un corps complet ultramétrique (de valuation non triviale). Montrer que

   (a) Une boule ouverte de K est à la fois ouverte et fermée.

   (b) Une boule fermée de K de rayon non nul est à la fois ouverte et fermée.

   (c) Une sphère de K de rayon non nul est à la fois ouverte et fermée.

   (d) Tout element d'une boule ouverte en est le (un) centre.

   (e) Tout triangle est isocèle.

Exercices

Exercice 1. Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini. Déterminer les valeurs absolues non triviales sur $\mathbb{F}_q(T)$ à équivalence près. A t'on une formule du produit ?

Exercice 2. Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini et soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_q[T]$. On note $|\cdot|_P$ la valeur absolue P-adique de $\mathbb{F}_q(T)$. Montrer que le complété de $\mathbb{F}_q(T)$ pour cette valeur absolue est isomorphe au corps des séries de Laurent $\mathbb{F}_{q'}((T))$ pour une puissance q' de q. Déterminer son anneau d'entiers ainsi que son corps résiduel.

Exercice 3. On considère $\mathbb{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$. C'est un sous-groupe fermé, le groupe quotient $\mathbf{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est donc de façon naturelle un groupe topologique. Montrer que c'est un groupe discret. Montrer que c'est un groupe de p-torsion puis le décrire explicitement comme groupe abstrait (c'est-à-dire isomorphe à $\varinjlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$).

Exercice 4. Soit L/K une extension finie de corps. Montrer que si K est complet pour une valeur absolue $|\cdot|$, et est localement compact, alors celle-ci admet une extension unique à L donnée par $|N_{L/K}(.)|$. Est-ce vrai si K n'est pas complet ?

Exercice 5. Soit K un corps valué complet ultramétrique et soit $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers.

1. Montrer que $\mathcal{O}_K$ est un anneau intégralement clos.

2. Montrer que $\mathcal{O}_K$ est local et de dimension de Krull égale à 1.

3. Montrer que la valeur absolue de K est discrète si et seulement si l'anneau $\mathcal{O}_K$ est noethérien.

4. Soit $\varpi \in \mathcal{O}_K$ un élément non nul et non inversible, montrer que $\mathcal{O}_K$ est un anneau ϖ-adiquement complet, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme d'anneaux
$$\mathcal{O}_K \simeq \varprojlim_n \mathcal{O}_K/(\varpi^n).$$

Exercice 6 (p-adic remarks).

1. Show that writing $x = \sum_i a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$, with $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ we have $x \in \mathbb{Q}$ if and only if the sequence $(a_i)_i$ is eventually periodic.

2. Show that there exists a continuous surjection $\mathbb{Z}_p \longrightarrow [0,1]$. Is there a continuous surjection $[0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}_p$?

Exercice 7. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Riesz : soit K un corps local et soit V un espace de Banach sur K (c'est-à-dire un K-espace vectoriel normé complet). Si V est localement compact, c'est un espace de dimension finie sur K.

1. Soit $\lambda : V \to K$ une forme linéaire et soit $H = \ker \lambda$. Montrer que λ est continue si et seulement si H est fermé dans V.

2. Soit $W \subset V$ un sous-K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que W est fermé dans V.

3. Montrer que V est localement compact si et seulement si la boule $\overline{B} = \{v \in V \mid ||v|| \leqslant 1\}$ est compacte.

4. Soit $\varepsilon \in |K^\times|$, $\varepsilon < 1$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie $W \subset V$ tel que
$$\overline{B} \subset W + \varepsilon \overline{B}$$
où $W = \sum_{i=1}^N K x_i$. En déduire que $\overline{B} \subset W + \varepsilon^m \overline{B}$ pour tout $m \geqslant 1$.

5. Conclure.

6. Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. Donner un exemple d'un espace de Banach sur $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ contenant une droite non fermée.