Théorie algébrique des nombres - TD1

Exercice 1 (Modules simples)**.** On note $V = k^2$ et $A = k[\alpha]$ pour $\alpha \in M_2(k)$. A quelle condition sur α, V est-il simple ? Indécomposable ? Semi-simple ?

Exercice 2. Algebres à division et produit tensoriel

1. Montrer que $M_n(A) \otimes_k B = M_n(A \otimes_k B)$ et $M_n(k) \otimes_k M_m(k) = M_{nm}(k)$.
2. Montrer que si $A = M_n(D)$ et $B = M_m(D')$ deux algèbres centrales simples (D, D' à division) qui ont la même classe dans le groupe de Brauer, alors $D = D'$.
3. Montrer que si A, B sont deux algebres à division de degrés premiers entre eux, $A \otimes_k B$ est une algebre à division.

Exercice 3. Algèbres de quaternions. On fixe k un corps, $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Pour $a, b \in k^\times$, on note $(a, b)_k$ ou (a, b) l'algèbre de quaternions sur un corps k, défini comme le k-espace vectoriel de base $1, i, j, k$ avec $i^2 = a$, $j^2 = b$ et $k = ij = -ji$. On dit que (a, b) est scindée si $(a, b) \simeq M_2(k)$.

1. Montrer que le centre de $(a, b)_k$ est k.
2. Donner la trace et la norme réduite dans (a, b).
3. Montrer que $(1, b)$ est scindée.
4. Montrer que pour $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{H} = (-1, -1)_\mathbb{R}$ n'est pas scindée.
5. Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}$ sont des sommes de 4 carrés d'entiers, alors ab aussi.
6. Montrer que (a, b) est scindée si et seulement si b est une norme dans $k(\sqrt{a})/k$.
7. Pour quels nombres premiers p, l'algèbre $(-1, p)$ sur $\mathbb{Q}$ est elle scindée ?
8. Montrer que (a, b) est de 2-torsion dans $\mathrm{Br}(k)$.
9. Montrer que si $k = \mathbb{F}_p$, alors $(a, b)_{\mathbb{F}_p} \simeq M_2(\mathbb{F}_p)$.

Remarque 0.1. La question 8 est en fait un cas particulier du fait que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ est de torsion. Et une réciproque est donné par un théorème difficile de Merkuryev : toute classe de 2-torsion dans le groupe de Brauer provient (à Brauer equivalence près seulement !) d'un produit d'algèbres de quaternions. La question 9 est en fait un cas particulier du fait que le groupe de Brauer d'un corps fini est trivial, que l'on va montrer maintenant.

Exercice 4. Groupe de Brauer

1. Montrer que tout algèbre à division sur un corps fini est commutative (i.e. est un corps).
2. En déduire que si k fini, $Br(k) = \{1\}$.
3. Si k algébriquement clos, $Br(k) = \{1\}$.